

LM125 Controle Continu 1 -B

11 février 2013

1 Exercice 1 [8 Points]

Résoudre les systèmes suivants :

$$(T_1) \begin{cases} 2x + z & = 5 \\ 2x - y + z & = 4 \\ -x + 4y - z & = 1 \end{cases}$$

$$(T_2) \begin{cases} 2x + 2y + 4z & = 8 \\ -3x + 4y + z & = 2 \\ x + 2y + 3z & = 6 \end{cases}$$

2 Exercice 2 [4 points]

Soient A et B les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer AB .

3 Exercice 3 [5 points]

Soit A une matrice de $M_2(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer qu'il existe λ tel que $A^2 - \text{tr}(A)A = \lambda \text{Id}$ où Id est la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$.
- 2) Dans le cas où $\det(A) \neq 0$, déduire de la question précédente une expression de l'inverse de A .

4 Exercice 4 [10 points]

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- 1) Soit $J = A + \text{Id}_3$. Calculer J^2 et J^3 . Montrer par récurrence une formule pour J^n , $n \in \mathbb{N}^*$ [3points]
- 2) Grace à la formule du binôme, montrer qu'il existe $C > 0$ (à exprimer avec une somme et des coefficients binomiaux) tel que $A^n = CJ + \text{id}$ (il faut distinguer la puissance 0 de J des autres, car la question d'avant est vérifié pour $n > 0$). [5 points]
- 3) Calculer C . [5points]