LM125 Controle Continu 1 -C

11 février 2013

1 Exercice 1 [8 Points]

Résoudre les systémes suivants :

$$(T_1)\left\{\begin{array}{lcl} 2x+3y-z & = & 4 \\ -3x+y+z & = & -1 \\ -x+4y-z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$(T_2)\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y+3z & = & 5 \\ -3x+2y-z & = & -4 \\ 2x+2y+4z & = & 6 \end{array}\right.$$

2 Exercice 2 [4 points]

Soient A et B les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer AB.

3 Exercice 3 [5 points]

Soit A une matrice de $M_2(\mathbb{R})$.
1)Montrer qu'il existe λ tel que $A^2 - tr(A)A = \lambda Id$ où Id est la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$.
2)Dans le cas où $det(A) \neq 0$, déduire de la question précédente une expression de l'inverse de A.

4 Exercice 4 [10 points]

On considére la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Soit $J = A + Id_3$. Calculer J^2 et J^3. Montrer par récurence une formule pour J^n ,$n \in \mathbb{N}^*$ [3points]
2) Grace à la formule du binome, montrer qu'il existe $C > 0$ (à exprimer avec une somme et des coefficients binomiaux) tel que $A^n = CJ + id$ (il faut distinguer la puissance 0 de J des autres, car la question d'avant est vérifié pour $n > 0$). [5 points]
3) Calculer C. [5points]