

# LM125 Controle Continu 1 -D

11 février 2013

## 1 Exercice 1 [8 Points]

Résoudre les systèmes suivants :

$$(T_1) \begin{cases} -2x + 2y + z = -3 \\ 3x - y + z = 5 \\ -x - 2y + 4z = 5 \end{cases}$$

$$(T_2) \begin{cases} x + y + 3z = 5 \\ -x + 2y + 3z = 4 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$$

## 2 Exercice 2 [4 points]

Soient A et B les matrices suivantes :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer  $AB$ .

## 3 Exercice 3 [5 points]

Soit  $A$  une matrice de  $M_2(\mathbb{R})$ .

- 1) Montrer qu'il existe  $\lambda$  tel que  $A^2 - \text{tr}(A)A = \lambda \text{Id}$  où  $\text{Id}$  est la matrice identité de  $M_2(\mathbb{R})$ .
- 2) Dans le cas où  $\det(A) \neq 0$ , déduire de la question précédente une expression de l'inverse de  $A$ .

## 4 Exercice 4 [10 points]

On considère la matrice suivante :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- 1) Soit  $J = A + \text{Id}_3$ . Calculer  $J^2$  et  $J^3$ . Montrer par récurrence une formule pour  $J^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  [3points]
- 2) Grâce à la formule du binôme, montrer qu'il existe  $C > 0$  (à exprimer avec une somme et des coefficients binomiaux) tel que  $A^n = CJ + \text{id}$  (il faut distinguer la puissance 0 de  $J$  des autres, car la question d'avant est vérifiée pour  $n > 0$ ). [5 points]
- 3) Calculer  $C$ . [5points]