LM 125 - Controle Continu 3

16 avril 2013

Les résultats seront encadrés ou soulignés.
Les "donc", "or" ... seront utilisés à bon escient.
Les abréviations : "ev", "sev" et "th" pour "espace vectoriel" "sous-espace vectoriel" et "théorème" seront acceptées et seront les seules acceptées.

---

1 Question de cours [7 points]

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E dans F.

1. Définir $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. [1 points]
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de F respectivement E. [3 points]
3. Si E et F sont de dimension finie, donner la définition du rang de f. Montrer que le rang de f est inférieur ou égal à la dimension de E et de F. [3 points]

2 Exercice 1 [12 points]

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^3$ danns $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (y + z, y, -2x + 2y + 3z)$$

1. Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. [1 points]
2. Calculer $\det(M - \lambda Id)$, montrer que les seules solutions sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$. [1 points]
3. Déterminer le sous espace de $\mathrm{Ker}(M - Id)$. Donner une base B_1 de $\mathrm{Ker}(M - Id)$. [3 points]
4. Déterminer le sous espace $\mathrm{Ker}(M - 2id)$. Donner une base B_2 de $\mathrm{Ker}(M - 2id)$. [2 points]
5. Montrer que (B_1, B_2) forme une base de $\mathbb{R}^3$. [2 points]
6. On note P la matrice constituée des vecteurs de B_1 et B_2, calculer P^{-1}. [1 points]
7. Calculer $P^{-1}MP$. [1 points]
8. En déduire M^n. [1 points]

3 Exerice 2 [6points]

Soit E un $\mathbb{R}$- espace vectoriel de dimension finie. Soit u_1, u_2, u_3 des endomorphismes de E, non nuls, et deux à deux différents. Soit $f = 3u_1 + 2u_2 - u_3$. On suppose que $u_1 + u_2 + u_3 = Id_E$ et que $u_i \circ u_j = 0$ pour $i \neq j$.

1. Soit $i \in \{1, 2, 3\}$ montrer que u_i est un projecteur. On note $E_i = \operatorname{Im} u_i$, montrer que $u_i|_{E_j} = 0$ lorsque $i \neq j$ [3 points].

2. Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. (On peut donc écrire $E_1 \oplus E_2$) Montrer que $(E_1 \oplus E_2) \cap E_3 = \{0\}$. (On peut donc écrire $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$.) Montrer que $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 = E$. [3 points]

4 Exercice 3 [5 points]

Soit A_α la matrice définie par

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. Calculer le determinant de A_α. Pour quelle valeur de α la matrice est elle inversible ? [1 points]

2. Determiner le rang de A_α en fonction de α. [2 points]

3. Dans cette question on suppose que A_α n'est pas inversible donner une base de son noyau et de son image. [2 points]