LM 125 - Controle Continu 3

16 avril 2013

Les résultats seront encadrés ou soulignés.
Les "donc", "or" ... seront utilisés à bon escient.
Les abréviations : "ev", "sev" et "th" pour "espace vectoriel" "sous-espace vectoriel" et "théorème" seront acceptées et seront les seules acceptées.

---

1 Question de cours [7 points]

1) Donner la définition du noyau d'une application linéaire.
2) Montrer qu'une applicaiton linéaire est injective si et seulement si son noyau est égal à $\{0\}$.

2 Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par
$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (3x + y - z,\, x + 3y - z,\, 2z)$.
1) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
2) Calculer le polynôme caractéristique $\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda Id)$. En déduire les valeurs propres de f.
3) Déterminer les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(f - \lambda Id)$ pour chaque valeur propre et en donner une base.
3) Déterminer une base B' de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f a pour forme

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

avec $d_1 \leq d_2 \leq d_3$.
3) Déterminer P la matrice de passage de la base canonique à la base B'.
4) En utilisant la relation liant A, D, P et P^{-1}, déterminer A^n, pour $n \geq 1$.

3 Exercice 2

Soit α un réel. On considére f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le déterminant de A_α.
2) Déterminer le rang de A_α en fonction de α.
3) Dans cette question on suppose que A_α n'est pas inversible.
Donner une base de $\operatorname{Im} A_\alpha$ et $\operatorname{Ker} A_\alpha$.