1 Produit scalaire

Définition : Soit E un espace vectoriel. On appelle produit scalaire une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. φ est bi-linaire (ie linéaire par rapport à la première et par rapport à la deuxiéme variable).
2. φ est symétrique (ie $\forall x, y \in E \times E$ on a $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
3. φ est défini positif (ie $\forall x \in E$ on a $\varphi(x, x) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$

1) Soit $\varphi\ :\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Montrer que φ est un produit scalaire.
Montrer que $< x, y >= x^t y$ où x^t désigne le vecteur transposé de x (c'est un vecteur ligne).
A partir de maintenant on se placera toujours dans $\mathbb{R}^n$ muni de ce produit scalaire (dit produit scalaire usuel) et on notera $\varphi(x, y) :=< x, y >$.

Définition : Soit $(u_1, ...u_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on dit qu'elle est orthonormale si $< u_i, u_j >= 0$ pour $i \neq j$ et $< u_i, u_i >= 1$.

2) Montrer que la base canonique est une famille orthonormale.
Dans le cas ou $n = 2$, soit $U_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ donner un vecteur U_2 tel que (U_1, U_2) soit orthonormal.

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ on appelle l'orthogonal de A et on note $A^\perp$ l'ensemble :

$$A^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n | \forall y \in A < x, y >= 0\}.$$

3)a) Soit A une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $A^\perp$ est un espace vectoriel.

3)b) Calculer $\{0\}^\perp$, $\mathbb{R}^{n\perp}$ $(1, 0, ..., 0)^\perp$.

4) Soit E un espace muni d'un produit scalaire, montrer qu'il existe toujours une base orthonormale. (vous etes pas obligé de montrer ça, mais on en a besoin après)

5) Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^n$.

2 Théorème spectral

Definition : On appelle matrice symétrique une matrice égale à sa transposé. Dans cette partie on notera A une matrice symétrique ie $A = A^t$.

1) Montrer que $<\mathrm{Ax,y}>=<\mathrm{x,Ay}>$.

On admet le théorème suivant :
Theorème [D'Alembert-Gauss] : Soit P un polynome de degré supérieur ou égal à 1. Alors il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$.

2) Montrer que toute matrice admet une valeur propre complexe

3)Montrer que les valeurs propres des matrices symétriques réelles sont réelles. (Ainsi une matrice symétrique réelle admet au moins une valeur propre réelle)

4) Soit F un sous espace vecoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par A (ie $\forall x \in F, Ax \in F$). Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par F.

5) Montrer qu'un espace propre de A est stable par A. (un espace propre E_λ c'est l'ensemble des vecteurs x qui vérifient $Ax = \lambda x$).

6) Soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de A. Montrer E_λ est orthogonal à E_μ (c'est à dire que $\forall x \in E_\lambda, \forall y \in E_\mu, < x, y >= 0$).

7) Montrer par récurence qu'il existe une base de vecteurs orthonormaux constitué de vecteur propre. (Ca c'est la question dure, mais c'est un joli théorème appelé théorème spectral)
8) Soit P la matrice constituée des vecteurs de la base de la question précédente. Montrer que $P^t P = Id$.