Correction Devoir Surveillé 3

Exercice 1. 1. *Montrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. *Soit* $i \in \mathbb{N}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $i \leq n$. *Caculer en fonction de* i *et* n :

$$\sum_{j=i+1}^{n} j$$

3. *On rappelle que l'on note* $\max(i,j) = \left\{ \begin{array}{ll} i & si\ i \geq j \\ j & sinon. \end{array} \right.$ *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \max(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2 + i^2 + n - i}{2}$$

4. *En déduire que*

$$\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \max(i,j) \left(\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \right)$$

5. *On note*

$$S_k = \sum_{i,j \in [\![1,1000]\!]} \max(i^k, j^k).$$

   (a) *Rappeler ce que renvoie l'instruction Python* `range(a,b)` *avec deux entiers* $a, b \in \mathbb{N}$ *tel que* $a \leq b$.

   (b) *Ecrire un script Python qui demande à l'utilsateur la valeur de* k, *calcul* S_k *et affiche le résultat.*

Correction. D'après le cours : $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} j = \frac{(n+i+1)(n-i)}{2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \max(i,j) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \max(i,j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \max(i,j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \max(i,j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} j \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(n+i+1)(n-i)}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{n^2 - i^2 + n - i}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2 + i^2 + n - i}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \max(i,j) &= \frac{1}{2}\left(n(n^2+n)+\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(n^2(n+1)+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(6n+(2n+1)-3}{6}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(8n-2)}{6}\right)\\
&= \left(\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}\right)
\end{aligned}$$

`range(a,b)` renvoie la suite d'entiers de a à $b-1$.

```
k = int(input ('quelle est la valeur de k ? ))
S=0
for i in range(1,1001):
   for j in range(1,1001):
      if i<=j:
         S=S+j**k
      else:
         S=S+i**k
print(S)
```

$\square$

Exercice 2. 1. *Résoudre pour $\theta \in \mathbb{R}$, l'équation $e^{i\theta} = 1$.*

On note $f(\theta) = e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + e^{3i\theta} + e^{4i\theta}$

2. *Montrer que $|f(\theta)| = \left|1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + e^{4i\theta} + e^{5i\theta}\right|$*
3. *En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ on a*

$$|f(\theta)| = \left|\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right|.$$

4. *En déduire la valeur de $\inf\{|f(\theta)|\ ,\ \theta \in \mathbb{R}\}$.*
5. *Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|f(\theta)| \leq 6$.*
6. *En déduire la valeur de $\sup\{|f(\theta)|\ ,\ \theta \in \mathbb{R}\}$.*

Correction. $e^{i\theta} = 1$ si et seulement si $\cos(\theta) = 1$ et $\sin(\theta) = 0$ c'est-à-dire

$$\theta \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

On a $f(\theta) = e^{-i\theta}(1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + e^{4i\theta} + e^{5i\theta})$. On a donc

$$|f(\theta)| = |e^{i\theta}| \left|1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + e^{4i\theta} + e^{5i\theta}\right|$$

Comme $|e^{i\theta}| = 1$ on a bien le résultat souhaité.

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. La raison est différent de 1 d'après la question 1 et l'hypothése faite sur θ. On a donc

$$|f(\theta)| = \left|\frac{1 - e^{i6\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right|$$

On utilise l'angle moitié, on obtient

$$\frac{1-e^{i6\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i3\theta}(e^{-3i\theta}-e^{i3\theta})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})}$$

Donc

$$\begin{aligned} |f(\theta)| &= \left|\frac{e^{i3\theta}}{e^{i\theta/2}}\right| \left|\frac{e^{-3i\theta}-e^{i3\theta}}{e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})}\right| \\ &= 1\left|\frac{2i\sin(3\theta)}{2i\sin(\frac{\theta}{2})}\right| \\ &= \left|\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right| \end{aligned}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $|f(\theta)| \geq 0$ par définition du module. Par ailleurs, d'après la question précédente

$$|f(\pi)| = \left|\frac{\sin(3\pi)}{\sin(\frac{\pi}{2})}\right| = 0$$

donc

$$\boxed{\inf\{|f(\theta)|\ ,\ \theta \in \mathbb{R}\} = 0.}$$

Pour le maximum on applique l'inégalité triangulaire, on a

$$|f(\theta)| \leq \left|e^{-i\theta}\right| + 1 + \left|e^{i\theta}\right| + \left|e^{2i\theta}\right| + \left|e^{3i\theta}\right| + \left|e^{4i\theta}\right| = 6$$

Enfin pour $\theta = 0$ on obtient $f(0) = 6$ donc

$$\boxed{\sup\{|f(\theta)|\ ,\ \theta \in \mathbb{R}\} = 6.}$$

□

Exercice 3. *Soit* $D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y = -2 \text{ et } 3y - 2z = 0\}$ $D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - z = -1 \text{ et } 3x - z = -3\}$

1. *Soit* $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in D_1$*. Exprimer* x_1 *et* y_1 *en fonction de* z_1*.*
2. *Etablir que* $D_1 \subset D_2$
3. *Soit* $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in D_2$*. Exprimer* x_2 *et* y_2 *en fonction de* z_2*.*
4. *Etablir que* $D_2 \subset D_1$*.*

Correction.
Soit $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in D_1$. On a $x_1 - y_1 = -2$ et $3y_1 - 2z_1 = 0$ donc

$$\boxed{y_1 = \tfrac{2}{3}z_1}$$

et $2x_1 = -2 + y_1 = -2 + \frac{2}{3}z_1$ donc

$$\boxed{x_1 = -1 + \tfrac{1}{3}z_1}$$

Ainsi

$$x_1 + y_1 - z - 1 = -1 + \frac{1}{3}z_1 + \frac{2}{3}z_1 - z_1 = -1$$

et

$$3x_1 - z_1 = -3 + z_1 - z_1 = -3$$

Donc $P_1 \in D_2$. Le résultat étant vrai pour tout $P_1 \in D_1$, on a donc

$$\boxed{D_1 \subset D_2}$$

Soit $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in D_2$. On a $x_2 + y_2 - z_2 = -1$ et $3x_2 - z_2 = -3$ donc

$$\boxed{x_2 = -1 + \frac{1}{3}z_2}$$

et $y_2 = -1 + z_2 - x_2 = -\frac{1}{3}z_2 + z_2 = \frac{2}{3}z_2$ donc

$$\boxed{y_2 = \frac{2}{3}z_2}$$

Ainsi

$$2x_2 - y_2 = -2 + \frac{2}{3}z_2 - \frac{2}{3}z_2 = -2$$

et

$$3y_2 - z_2 = 3\frac{2}{3}z_2 - z_2 = 0$$

Donc $P_2 \in D_1$. Le résultat étant vrai pour tout $P_2 \in D_2$, on a donc

$$\boxed{D_2 \subset D_1}$$

□

Exercice 4.

1. *Rappeler la valeur de* $R_3 = \sum_{k=0}^{n} k^3$ *en fonction de* $n \in \mathbb{N}$
2. *Soit* $k \in \mathbb{N}$, *développer* $(k+1)^5 - k^5$.
3. *A l'aide de la somme téléscopique* $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5 - k^5$ *donner la valeur de* $R_4 = \sum_{k=0}^{n} k^4$ *en fonction de* $n \in \mathbb{N}$. *(On pourra garder une formule développée, malgré ce que j'ai pu dire en classe...)*
4. *Soit* $x \in \mathbb{N}$, *on note* $R_x(n) = \sum_{k=0}^{n} k^x$ *Ecrire une fonction Python qui prend en paramètre* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{N}$ *et rend la valeur de* $R_x(n)$

Correction.

1. $R_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$
3. On a d'une part

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5 - k^5 = (n+1)^5$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^5 - k^5 &= \sum_{k=0}^{n} 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1\\ &= 5R_4 + 10R_3 + 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\end{aligned}$$

Donc

$$R_4 = \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - 10\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)\right)$$

Les calculs donnent :

□

Problème 1. *Dans cet exercice, on considère une suite quelconque de nombres réels* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, et on pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Partie I : Quelques exemples

1. *Calculer* b_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *lorsque la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite constante égale à* 1.
2. *Calculer* b_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *lorsque la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par* $a_n = \exp(n)$.
3. *(a) Démontrer que, pour tout* $(n \geq 1, n \geq k \geq 1)$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.

   (c) Calculer la valeur de b_n*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *lorsque la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par* $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Partie II : Formule d'inversion

Le but de cette partie est de montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'exprime en fonction de la suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. *Montrer que pour tout* $(k, n, p) \in \mathbb{N}^3$*, tel que* $k \leq p \leq n$ *on a :*

$$\binom{n+1}{p}\binom{p}{k} = \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}.$$

2. *Montrer que, pour tout* $(k, n) \in \mathbb{N}^2$*, tel que* $k \leq n$ *on a :*

$$\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n+1-k}{i} = (-1)^{n-k}.$$

3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} \binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}(-1)^{p-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n+1}{k} b_k$$

4. *Donner, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, l'expression de* a_{n+1} *en fonction de* b_{n+1} *et de* $a_0, ..., a_n$.
5. *Prouver, par récurrence forte sur* n *que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} b_k.$$

6. *En utilisant le résultat précédent montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k2^k (-1)^{n-k} = 2n.$$

Correction.

Partie I : Quelques exemples

1. Pour $a_n = 1$, $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. Pour $a_n = exp(n)$, $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^k = (1+e^1)^n$.

3. (a)

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

(b) Comme le premier terme est nul $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}$ Et d'après la question précédente on a donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$ Or en faisant un changement de variable on obtient $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$$

(c) D'après la question 3a) on a $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$. Donc

$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

On fait un changement de variable $k+1 = j$ on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{j} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} - 1\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)\end{aligned}$$

Partie II : Formule d'inversion

1. C'est l'exercice 2 du DM 4.

2.

$$\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n+1-k}{i} = \sum_{i=0}^{n-k+1} (-1)^i \binom{n+1-k}{i} - (-1)^{n-k+1}$$

Et d'après le BdN :

$$\sum_{i=0}^{n-k+1} (-1)^i \binom{n+1-k}{i} = (1-1)^{n-k} = 0$$

et

$$-(-1)^{n-k+1} = (-1)^{n-k}$$

Ce qui donne le résultat.

3. $b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a_k + a_{n+1}$. Donc

$$a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a_k$$

4. Soit $P(n)$ la propriété : " $\forall p \leq n\, a_p = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}b_p$."

Montrons $P(0)$: "$\forall j \leq 0\, a_j = \sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}b_k$." Il suffit de vérifier $a_0 = \sum_{k=0}^{0}(-1)^{0-k}\binom{0}{k}b_k$.
Et on a $\sum_{k=0}^{0}(-1)^{0-k}\binom{0}{k}b_k. = b_0$ Par ailleurs, par définition $b_0 = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a_k = a_0$. Ainsi $P(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u>

On suppose que P est vraie pour un certain entier naturel n fixé. Montrons $P(n+1)$. Pour cela il suffit de vérifier que

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}b_k$$

Or on a vu que

$$a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p}a_p$$

et en utilisant l'hypothése de récurrence on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p}a_p &= \sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}b_k \\ &= \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n+1}{p}\binom{p}{k}(-1)^{p-k}b_k \\ &= \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}(-1)^{p-k}b_k\end{aligned}$$

D'après la question II . 1.
On échange les deux symboles sommes on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}(-1)^{p-k}b_k &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n}\binom{n+1}{k}\binom{n+1-k}{p-k}(-1)^{p-k}b_k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}b_k\sum_{p=k}^{n}\binom{n+1-k}{p-k}(-1)^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}b_k\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n+1-k}{i}(-1)^{i}\end{aligned}$$

En faisant le cahngement d'indice $p-k=i$.
On obtient finalement en utilisant la question II. 2.

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p}a_p = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}b_k(-1)^{n-k}$$

On conclut en remarquant que $b_{n+1} = \binom{n+1}{n+1}b_{n+1}(-1)^{n+1-(n+1)}$ et ainsi

$$a_{n+1} = (-1)^{n+1-(n+1)}\binom{n+1}{n+1}b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}b_k = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k}b_k$$

5. On a vu dans la partie I que pour $a_n = n$ on a $b_n = n2^{n-1}$. Donc en appliquant le résultat précédent on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k2^{k-1}(-1)^{n-k} = n$$

Ce qui donne finalement

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k2^{k}(-1)^{n-k} = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k2^{k-1}(-1)^{n-k} = 2n$$

□