TD 8 - Fonctions

I Ensemble de définition

Exercice 1. *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :*

1. $f(x) = \sqrt{x^3}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x - \frac{1}{x}}$
3. $f(x) = \sqrt{x-3} + \dfrac{\sqrt{5+x}}{x}$
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$

Exercice 2. *Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble de définition de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - (m+1)x + m}.$$

Exercice 3. *Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ après avoir indiqué pour quels réels cela a un sens :*

1. $f : x \mapsto 2x^2 - x + 1$ *et* $g : x \mapsto 2\sqrt{x-3}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{2x^2-8}{x}$ *et* $g : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$.

Exercice 4. *Pour chacune des expressions, donner le domaine de définition et simplifier quand c'est possible.*

1. $f(x) = x \ln \sqrt{e^{\frac{x}{2}}} + \left(\sqrt{e^{2\ln(2x-1)}}\right)^3$.
2. $g(x) = e^{\sqrt{\ln x}} + e^{(\ln x)^2}$.

II Parité, imparité, périodicité, symétrie

Exercice 5. *Dans chacun des cas suivants, étudier la parité et l'imparité de la fonction f. Indiquer aussi la périodicité lorsqu'elle est manifeste :*

1. $f(x) = \sqrt{x^2}$
2. $f(x) = x^2 + x^4 + x^6 + x^8$
3. $f(x) = x + x^3 + x^5 + 2x^7$
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-|x|}{2-|x|}}$
5. $f(x) = \dfrac{x^3+3x}{x^2+|x|}$
6. $f(x) = |x+1| - |x-1|$
7. $f(x) = \sin x + \cos x$
8. $f(x) = \cos x + \cos(2x)$

Exercice 6. *Montrer les résultats suivants :*

1. *La composée de deux fonctions impaires est une fonction impaire.*
2. *La composée d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction paire.*
3. *La somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire.*
4. *Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.*

III Fonction majorée, minorée, bornée

Exercice 7. *Déterminer lorsqu'ils existent les bornes supérieures, inférieures, maxima et minima des fonctions suivantes :*

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ *sur* $[0, +\infty[$.
2. $f : x \mapsto \cos x + \sin x$ *sur* $\mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\ln(x)}$ *sur* $[1, +\infty[$.
4. $f : x \mapsto 5\ln(x) - x + \dfrac{6}{x}$ *sur* $[1, 6]$ *(on donne* $5\ln(3) \leq 6$*).*

IV Calculs de limites

Exercice 8. *Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition. On justifiera correctement les résultats. On fera, lorsque cela est possible, l'interprétation graphique des résultats.*

1. $f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}$
2. $f(x) = \dfrac{e^x + x^2 + x + 1}{e^{2x} + 1}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + x^2}{2x+1}\right)$
5. $f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1}$
6. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \ln x$
7. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$
8. $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$
9. $f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x-2}}$
10. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

Exercice 9. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^7 + 4x^2 - 1}{x^9 + 1}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^7 + x^2 - x}{x^6 + 4x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{x^7 + x^2 - x}{x^6 + 4x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 4x - 5}$
5. $\displaystyle\lim_{x \to -5^+} \frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 4x - 5}$
6. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$
7. $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{|x+2|}$
8. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$
9. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 1 - x|x-3|)$
10. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 3x + 1 - x|x-3|)$

V Calculs d'ensembles de dérivabilité et de dérivées

Exercice 10. *Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivées :*

1. $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$
2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}$
3. $f(x) = \sqrt{e^x}$
4. $f(x) = e^{x\cos(x)}$
5. $f(x) = (1-x)e^{\sqrt{x-x^2}}$
6. $f(x) = \dfrac{\sin^3(2x)}{2+\cos(5x)}$
7. $f(x) = \sin(\ln x)$
8. $f(x) = \ln(e^x + x^2)$
9. $f(x) = \dfrac{x-e^x}{e^x+1}$
10. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2-4}}\right)$
11. $f(x) = \dfrac{1}{(\cos(x))^4}$
12. $f(x) = \dfrac{1}{2^{x+1}}$
13. $f(x) = (e^{2x}-1)^{\pi}$
14. $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{3^x}\right)^4$
15. $f(x) = 2^{\ln x}$
16. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$
17. $f(x) = \ln(\ln x)$
18. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2-1}+x)$
19. $f(x) = \dfrac{3^{x-1}\cos x}{x^x}$

Exercice 11. ***(Avec des valeurs absolues)*** *Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis leur ensemble de dérivabilité, et calculer leur dérivées :*

1. $f(x) = \dfrac{\ln(|x^2-1|)}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|e^x-1|+1}}$

VI Études de fonctions

Exercice 12. ***(Valeurs absolues)*** *On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par*

$$f:\ x \mapsto |2x-3| + |x-5| \quad \text{et} \quad g:\ x \mapsto |2x^2-5| - |x^2-1|.$$

Simplifier les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$ en fonction des valeurs de x. En déduire les représentations graphiques de ces deux fonctions.

Exercice 13. ***(Valeurs absolues)*** *Soit la fonction h définie par $h(x) = x\exp|\ln|x||$.*

1. *Donner l'ensemble de définition de h.*
2. *Représenter graphiquement la fonction h.*

Exercice 14. ***(Fonctions trigonométriques)*** *Soit f une fonction définie par $f(x) = \ln|\cos(x)\sin(x)|$.*

1. *Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.*
2. *Montrer que f est π périodique, paire et que : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = f(x)$. A quel intervalle peut-on réduire l'étude de la fonction f ?*
3. *Montrer soigneusement que f est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.*
4. *Tracer la courbe de f en justifiant sa construction.*

Exercice 15. ***(Fonctions trigonométriques)*** *Soit la fonction f définie par : $f(x) = 3\cos x - \cos(3x)$.*

1. *Étudier la parité et la périodicité de f.*
2. *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.*
3. *Étudier les variations de f sur $[0,\pi]$.*
4. *Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $x = \pi/2$. Déterminer les abscisses pour lesquelles la tangente est horizontale.*

5. *Représenter f sur l'intervalle* $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Exercice 16. *Soit f la fonction définie par* $f(x) = \frac{1-x}{2x}$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f, étudier sa dérivabilité et calculer sa dérivée.*
2. *Déterminer les limites de f aux bords de $\mathcal{D}_f$ et dresser son tableau de variations.*
3. *Étudier les asymptotes.*
4. *Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 1$.*
5. *Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -1 - f(x)$. Interprétation graphique ?*
6. *Tracer la courbe représentative de f.*
7. *Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$ et les déterminer. Que représentent ces solutions pour la courbe représentative de f ?*

Exercice 17. ***(Paramètres)*** *Pour tout $m \in \mathbb{R}^\star$, on désigne par f_m la fonction définie par $f_m(x) = e^{mx\ln(1+x)}$.*

1. *Déterminer l'ensemble de définition commun $\mathcal{D}$ de toutes les fonctions f_m.*
2. *Discuter selon m les limites de f_m aux bornes de cet ensemble.*
3. *Montrer que f_m est dérivable sur $\mathcal{D}$ pour tout $m \in \mathbb{R}^\star$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}^\star$, il existe une fonction g_m telle que : $f'_m = m g_m f_m$.*
4. *Montrer que g_m est une fonction strictement croissante sur $\mathcal{D}$.*
5. *Déduire des questions précédentes les variations de f_m suivant m.*
6. *Tracer dans un même repère $\mathcal{C}_{-1}$, $\mathcal{C}_{-\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{C}_1$.*

VII Calcul de primitives et d'intégrales

Exercice 18. *Calculer les primitives des fonctions suivantes.*

1. $f(x) = x\sqrt{x}$
2. $f(x) = \dfrac{\sin x \cos x}{\cos^2(x) + 2}$
3. $f(x) = \dfrac{(\ln x)^3}{x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$
5. $f(x) = xe^x$
6. $f(x) = \dfrac{e^{2x} + 1}{(e^{2x} + 2x + 1)^3}$

Exercice 19. *Calculer les intégrales suivantes.*

1. $I = \displaystyle\int_0^2 (x^4 + 5x^3 - 2x + 1)\,dx$
2. $I = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$
3. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx$
4. $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos^2(x))\tan^3(x)\,dx$

VIII Fonctions de plusieurs variables

Exercice 20. *Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.*

1. $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
2. $f(x,y) = \sin^2(x)\cos^3(y)$
3. $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{1}{x-y}}$
4. $f(x,y) = \dfrac{1}{e^x + e^{-y}}$
5. $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2-4}\right)$
6. $f(x,y) = \tan(x-y)$

Exercice 21. *Un gaz parfait a pour équation d'état $PV = nRT$. Ses coefficients thermoélastiques sont le coefficient de dilatation isobare α, le coefficient de compression isochore β et le coefficient de compressibilité isotherme χ définis de la façon suivante :*

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \quad \text{et} \quad \chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

1. *Calculer l'expression exacte des coefficients thermoélastiques.*
2. *Montrer que l'on a $P\beta\chi = \alpha$.*