TD 1 - Fonctions usuelles réelles

I Rappels sur les nombres réels

I. 1 Borne inférieure, supérieure, maximum, minimum

Exercice 1. Chercher la borne inférieure, supérieure et dire si ce sont des maximum, minimum pour les ensembles suivants :

1. $E_1 = \{x - \lfloor x \rfloor \mid x \in \mathbb{R}\}$
2. $E_2 = \{-x^2 + 3x - 1 \mid x \in [-1, 1]\}$
3. $E_3 = \{\exp(-x^2) | \, x \in \mathbb{R}\}$
4. $E_4 = \{\frac{1}{n!+1} | \, n \in \mathbb{N}^*\}$

I. 2 Résolution d'équations et d'inéquations :

Exercice 2. Résoudre les (in)-équations suivantes :

1. $x^3 + 4x^2 + x - 6 \geq 0$
2. $x^3 - x^2 - x - 2 < 0$
3. $(3x - 1)(x + 2) + (2 - 6x)(4x + 3) > 0$
4. $32x^6 - 162x^2 < 0$
5. $\dfrac{2x}{4x^2 - 1} \leq \dfrac{2x + 1}{4x^2 - 4x + 1}$
6. $\dfrac{x^4 + x}{x^4 - 5x^2 + 4} < 1$
7. $2x^2 - 4x + 2 = 1 - x$
8. $(x - 1)^2 \leq 1$
9. $\dfrac{1}{x - 2} \leq \dfrac{1}{2x}$
10. $\dfrac{2x + 1}{1 + x} \geq \dfrac{3x - 2}{1 + x}$
11. $\dfrac{x^2 + 10x - 4}{x - 2} \leq \dfrac{16x + 2}{x + 1}$

II Fonctions usuelles

II. 1 Ensemble de définition

Exercice 3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x^3}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x - \frac{1}{x}}$
3. $f(x) = \sqrt{x - 3} + \dfrac{\sqrt{5 + x}}{x}$
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2 - x}{x + 4}\right)$

Exercice 4. Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble de définition de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par
$$f(x) = \sqrt{x^2 - (m + 1)x + m}.$$

Exercice 5. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ après avoir indiqué pour quels réels cela a un sens :

1. $f : \; x \mapsto 2x^2 - x + 1$ et $g : \; x \mapsto 2\sqrt{x - 3}$.
2. $f : \; x \mapsto \dfrac{2x^2 - 8}{x}$ et $g : \; x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$.

Exercice 6. Pour chacune des expressions, donner le domaine de définition et simplifier quand c'est possible.

1. $f(x) = x \ln \sqrt{e^{\frac{x}{2}}} + \left(\sqrt{e^{2\ln(2x-1)}}\right)^3$.
2. $g(x) = e^{\sqrt{\ln x}} + e^{(\ln x)^2}$.

II. 2 Valeur absolue

Exercice 7. Résolution d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues :

1. $|2+x| + 2 + 2x = x^2$
2. $x^2 = |x|$
3. $|2x-3| \leq 2$
4. $|2x+3| - |-5x+6| \geq 3x+2$
5. $|x^2-1| \leq 2|x|$
6. $||x|-5| \geq ||3x|-3|$
7. $\sqrt{x^2-x-2} \geq |3x+2|$
8. $\dfrac{x^2+\sqrt{2}x}{|x^2-1|+1} \geq 1$

II. 3 Partie entière

Exercice 8. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x - \lfloor x \rfloor}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est périodique de période 1.
3. Donner une expression simplifier de f sur les intervalles de la forme $]k, k+1[$, $k \in \mathbb{N}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que x est rationnel si et seulement si $f(x)$ est rationnel.

Exercice 9. Montrer que la fonction partie entière est croissante, ie montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, :

$$x \leq y \Longrightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor .$$

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Exercice 10. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor .$$

II. 4 Fonctions polynomiales

Exercice 11. On pose $P(x) = x^2 + 3x$, $Q(x) = x^2 + x + 1$, $S(x) = x^2 - 1$.

1. Calculer $P^2(x)$, $P(x) - Q(x)$ et $P^2(x) - Q^2(x)$.
2. Calculer $P(x+1)$.
3. Calculer $S \circ f(t)$ avec $f : t \mapsto \cos(t)$.

II. 5 Exponentielle et logarithme

Exercice 12. Résolution d'équations et d'inéquations avec les fonctions $\ln$, $\exp$ et $x \mapsto a^x$:

1. $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$
2. $|\ln x| < 1$
3. $\ln(2x+4) - \ln(6-x) = \ln(3x-2) - \ln(x)$
4. $2^{2x+1} + 2^x = 1$
5. $2e^{2x} - e^x - 1 \leq 0$
6. $2\ln(x) + \ln(2x-1) > \ln(2x+8) + 2\ln(x-1)$
7. $4e^x - 3e^{\frac{x}{2}} \geq 0$
8. $9^x - 2 \times 3^x - 8 > 0$

Exercice 13. À l'aide d'une étude de fonction, démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x > 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+ : e^x - \dfrac{x^2}{2} \geq 1.$

II. 6 Fonctions trigonométriques

Exercice 14. Calculer les réels suivants : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 15. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos(5x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(4x) = -\dfrac{1}{2}$
3. $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = -1$
4. $\tan(2x) = -\sqrt{3}$

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$ et enfin dans $]-\pi, \pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x - \cos x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$
2. $-\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$
3. $\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos x = 0$
4. $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = \sqrt{2}$

Exercice 17.
1. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On pose : $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Établir les relations suivantes, et indiquer pour quelles valeurs de x elles sont valides :
   (a) $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ (b) $\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$ (c) $\tan x = \dfrac{2u}{1-u^2}$
2. En utilisant ces relations, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x - 3\sin x + 2\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1 = 0$.

II. 7 Racine carrée

Exercice 18. Résoudre les (in)-équations suivantes :

1. $\sqrt{x+1} = x - 1$
2. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} \leq 1$
3. $\sqrt{x^2-3} > 5x - 9$
4. $\sqrt{x+1} = x - 1$
5. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} \leq 1$
6. $\sqrt{x^2-3} > 5x - 9$

Exercice 19. On considère l'expression $R(a) = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

1. Pour quels valeurs de a, $R(a)$ est-elle bien définie ?
2. Pour ces valeurs, simplifier l'expression $R(a)$. Tracer la fonction $a \mapsto R(a)$.

III Etudes de fonctions

III. 1 Études de fonctions

Exercice 20. (Valeurs absolues) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f: \ x \mapsto |2x-3| + |x-5| \quad \text{et} \quad g: \ x \mapsto |2x^2-5| - |x^2-1|.$$

Simplifier les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$ en fonction des valeurs de x. En déduire les représentations graphiques de ces deux fonctions.

Exercice 21. (Valeurs absolues) Soit la fonction h définie par $h(x) = x \exp|\ln|x||$.

1. Donner l'ensemble de définition de h.
2. Représenter graphiquement la fonction h.

Exercice 22. (Fonctions trigonométriques) Soit f une fonction définie par $f(x) = \ln|\cos(x)\sin(x)|$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est π périodique, paire et que : $\forall x \in \mathcal{D}_f, \ f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$. A quel intervalle peut-on réduire l'étude de la fonction f ?
3. Montrer soigneusement que f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.
4. Tracer la courbe de f en justifiant sa construction.

Exercice 23. (Fonctions trigonométriques) Soit la fonction f définie par : $f(x) = 3\cos x - \cos(3x)$.

1. Étudier la parité et la périodicité de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $x = \pi/2$. Déterminer les abscisses pour lesquelles la tangente est horizontale.
5. Représenter f sur l'intervalle $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Exercice 24. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{2x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f, étudier sa dérivabilité et calculer sa dérivée.
2. Déterminer les limites de f aux bords de $\mathcal{D}_f$ et dresser son tableau de variations.
3. Étudier les asymptotes.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 1$.
5. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}_f, \ -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -1 - f(x)$. Interprétation graphique ?
6. Tracer la courbe représentative de f.
7. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$ et les déterminer. Que représentent ces solutions pour la courbe représentative de f ?

Exercice 25. (Paramètres) Pour tout $m \in \mathbb{R}^\star$, on désigne par f_m la fonction définie par $f_m(x) = e^{mx\ln(1+x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition commun $\mathcal{D}$ de toutes les fonctions f_m.
2. Discuter selon m les limites de f_m aux bornes de cet ensemble.
3. Montrer que f_m est dérivable sur $\mathcal{D}$ pour tout $m \in \mathbb{R}^\star$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}^\star$, il existe une fonction g_m telle que : $f'_m = m g_m f_m$.

4. Montrer que g_m est une fonction strictement croissante sur $\mathcal{D}$.
5. Déduire des questions précédentes les variations de f_m suivant m.
6. Tracer dans un même repère $\mathcal{C}_{-1}$, $\mathcal{C}_{-\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{C}_1$.

III. 2 Calculs d'ensembles de dérivabilité et de dérivées

Exercice 26. Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivées :

1. $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$
2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}$
3. $f(x) = \sqrt{e^x}$
4. $f(x) = e^{x\cos(x)}$
5. $f(x) = (1-x)e^{\sqrt{x-x^2}}$
6. $f(x) = \dfrac{\sin^3(2x)}{2+\cos(5x)}$
7. $f(x) = \sin(\ln x)$
8. $f(x) = \ln(e^x + x^2)$
9. $f(x) = \dfrac{x - e^x}{e^x+1}$
10. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2-4}}\right)$
11. $f(x) = \dfrac{1}{(\cos(x))^4}$
12. $f(x) = \dfrac{1}{2^{x+1}}$
13. $f(x) = (e^{2x}-1)^{\pi}$
14. $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{3^x}\right)^4$
15. $f(x) = 2^{\ln x}$
16. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$
17. $f(x) = \ln(\ln x)$
18. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2-1}+x)$
19. $f(x) = \dfrac{3^{x-1}\cos x}{x^x}$

Exercice 27. (Avec des valeurs absolues) Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis leur ensemble de dérivabilité, et calculer leur dérivées :

1. $f(x) = \dfrac{\ln(|x^2-1|)}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|e^x-1|+1}}$

III. 3 Fonction majorée, minorée, bornée

Exercice 28. Déterminer lorsqu'ils existent les bornes supérieures, inférieures, maxima et minima des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $[0,+\infty[$.
2. $f : x \mapsto \cos x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\ln(x)}$ sur $[1,+\infty[$.
4. $f : x \mapsto 5\ln(x) - x + \dfrac{6}{x}$ sur $[1,6]$ (on donne $5\ln(3) \leq 6$).

III. 4 Parité, imparité, périodicité, symétrie

Exercice 29. Dans chacun des cas suivants, étudier la parité et l'imparité de la fonction f. Indiquer aussi la périodicité lorsqu'elle est manifeste :

1. $f(x) = \sqrt{x^2}$
2. $f(x) = x^2 + x^4 + x^6 + x^8$
3. $f(x) = x + x^3 + x^5 + 2x^7$
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-|x|}{2-|x|}}$
5. $f(x) = \dfrac{x^3+3x}{x^2+|x|}$
6. $f(x) = |x+1| - |x-1|$
7. $f(x) = \sin x + \cos x$
8. $f(x) = \cos x + \cos(2x)$

Exercice 30. Montrer les résultats suivants :

1. La composée de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
2. La composée d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction paire.
3. La somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
4. Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.

III. 5 Calculs de limites

Exercice 31. Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition. On justifiera correctement les résultats. On fera, lorsque cela est possible, l'interprétation graphique des résultats.

1. $f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}$
2. $f(x) = \dfrac{e^x + x^2 + x + 1}{e^{2x} + 1}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + x^2}{2x+1}\right)$
5. $f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1}$
6. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \ln x$
7. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$
8. $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$
9. $f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x-2}}$
10. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

Exercice 32. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^7 + 4x^2 - 1}{x^9 + 1}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^7 + x^2 - x}{x^6 + 4x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^7 + x^2 - x}{x^6 + 4x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 4x - 5}$
5. $\lim\limits_{x\to-5^+} \dfrac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 4x - 5}$
6. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$
7. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3 + 8}{|x+2|}$
8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 3x + 1 - x|x-3|)$
10. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 3x + 1 - x|x-3|)$