TD 3 - Suites réelles usuelles

I Sommes et Produits

I. 1 Factorielles

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{7!}{6!},\quad B = \frac{3 \times 4!}{(3!)^2},\quad C = \frac{n!}{(n-1)!},\quad D = \frac{(n+1)!}{(n-3)!} \text{ et } E = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!}.$$

I. 2 Calculs de sommes

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer les expressions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k}$ avec $x \neq 0$
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (i^2 + n + 3)$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3$
5. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n^2} (1-a^2)^{2k+1}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3 \times 2^k + 1)$
7. $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k - 1 + 2^k)$
9. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j} a^j$
10. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} (-1)^i$
11. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}}$
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \binom{n}{k}$

Exercice 3. Coefficients binomiaux
Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j}$
2. $T = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$, puis $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ (on pourra écrire que $k^2 = k(k-1) + k$).
3. $S_3 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$.

Exercice 4. Sommes télescopiques

1. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels avec $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_{i-1})$.
2. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \ln\left[\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right]$

Exercice 5. Sommes télescopiques

1. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+2}$. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ \dfrac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+3}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)(k+3)}$.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

   Retrouver ce résultat par récurrence : montrer que $\forall n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

Exercice 6. Sommes trigonométriques
Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}$ avec $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.
2. $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(kx)$ et $S_2' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(kx)$.
3. $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kx)$ avec a et x réels fixés.
4. $S_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^3(kx)$.
5. $S_5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
6. $S_6 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(2k)}{3^k}$.
7. $S_7 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(y+kx)$ avec $(x,y) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
8. $S_8 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^2(kx)$

Exercice 7. Sommes et dérivation : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

1. On pose, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Calculer $f(x)$.
2. En déduire, pour tout x dans $\mathbb{R}$, la valeur de $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$, puis en déduire S.

Exercice 8. Sommes et dérivation : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Calculer $f(x)$.
2. En dérivant, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, et en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$.
3. Calculer de la même façon : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$.

Exercice 9. Sommes d'indices pairs et impairs

Soit n un entier naturel non nul. On définit les sommes suivantes : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.

1. Montrer que $S_n + T_n = 2^{2n}$ et $S_n - T_n = 0$.
2. En déduire une expression de S_n et de T_n en fonction de n.

I. 3 Calculs de produits

Exercice 10. Soit $(n,p,i) \in \mathbb{N}^2$ non nuls. Calculer les produits suivants :

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$ et $\displaystyle\prod_{k=i}^{i+n} k$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k-2)$
5. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$
6. $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k}$. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{2}\right)$.

II Suites usuelles

Exercice 12. Calculer le terme général, étudier la convergence, et calculer la somme des termes $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $u_{n+1} = u_n + 3$
2. $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2}$
3. $u_{n+1} = u_n - 5$
4. $u_{n+1} = 3u_n$
5. $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$
6. $u_{n+1} = -5u_n$
7. $u_{n+1} = 3u_n + 3$
8. $u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{3}$
9. $u_{n+1} = -u_n - 4$

Exercice 13. Suites homographiques.
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \geq 3$, $u_n > 1$.
2. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie sur $\mathbb{N}$.
3. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
4. En déduire l'expression explicite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 14. Déterminer en fonction de n, le terme u_n des suites qui vérifient

1. $u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = 2u_n + 3u_{n-1}$.
2. $u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. $u_0 = 2,\ u_1 = -3,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -8u_{n+1} - 16u_n$.
4. $u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ \forall n \geq 3,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
5. $u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -4u_n$.

Exercice 15. Pour ces suites définies par récurrence, calculer le terme général en fonction de n :

1. $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \dfrac{3(n+1)}{2n}u_n$
2. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n^3$

III Monotonie et convergence

Exercice 16. Étudier la monotonie des suites définies par

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - n$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \frac{\ln(n)}{n}$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n + 2(-1)^n$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$

Exercice 17. Limites de suites définies explicitement
Étudier le comportement en $+\infty$ des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{n}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n^2)$
4. $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$
5. $u_n = \frac{2^n + n}{2^n}$
6. $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n - \ln(n^3)}$
7. $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$
8. $u_n = \frac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n}$
9. $u_n = \frac{\sin n}{n}$
10. $u_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$
11. $u_n = n^2 - n\cos n + 2$
12. $u_n = \frac{n! + (n+1)!}{(n+2)!}$
13. $u_n = \ln(2^n + n)$
14. $u_n = n^{\frac{1}{n}}$
15. $u_n = (\ln n)^n$
16. $u_n = \frac{n^3 + 2^n}{3^n}$
17. $u_n = (n^2 + n + 1)^{\frac{1}{n}}$
18. $u_n = \frac{1}{a^n}\sum_{k=1}^{n} b^k$
19. $u_n = n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right)$

IV Calculs de sommes doubles

Exercice 18. Dans cet exercice, n, m et p sont deux entiers naturels non nuls et x un nombre complexe. Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} p(q^2+1)$
2. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1$ et $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1$
3. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j$
4. $\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k}^{n} \frac{k}{l+1}$
5. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j$
6. $\sum_{k=0}^{n^2}\sum_{i=k}^{k+2} ki^2$
7. $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j} \frac{x^i}{x^j}$
8. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}$