

TD 4 : Systèmes

I Systèmes linéaires sans paramètre

Exercice 1. Déterminer le rang et résoudre les systèmes linéaires d'inconnues réelles suivants :

$$1. \begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 2x - y - 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 2z + t = -8 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y - z - t = 3 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 1 \\ x + 3y + 3z + t = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 5a + b + 2c = 13 \\ 4a + 2b + c = 11 \\ a - b + c = 2 \\ 3a + b + c = 8 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x + 2y + z - u - v = 0 \\ x - y - z - u + 2v = 0 \\ -x + 2y + 3z + u - v = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x - 2y + 3z - 4t = 4 \\ y - z + t = -3 \\ x + 3y - 3t = 1 \\ x + 2y + z - 4t = 4 \end{cases}$$

II Systèmes linéaires avec paramètre

Exercice 2. Discuter les solutions dans \mathbb{R} des systèmes suivants en fonction des paramètres $m \in \mathbb{R}$ ou $r \in \mathbb{R}$:

$$1. \begin{cases} mx + y + z = X \\ x + my + z = Y \\ x + y + mz = Z \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^2z = 1 - m \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} (m-1)x - my = m \\ (m+1)x + (m+1)y = m^2 - 1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + my = m^2 \\ mx + y = m^2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} y + z = rx \\ x + z = ry \\ x + y = rz \end{cases}$$

III Divers

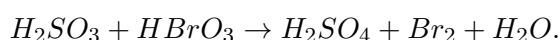
Exercice 3. Soit la fonction f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (3x + 2y, 5x + 3y). \end{cases}$$

Montrer que pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (X, Y)$ et donner l'expression de x et y en fonction de X et Y .

Remarque : on dit que f est bijective. La fonction qui à (X, Y) associe l'expression trouvée pour (x, y) est appelée bijection réciproque de f et est notée f^{-1} . On peut vérifier que $f^{-1}(f(x, y)) = (x, y)$ et que $f(f^{-1}(X, Y)) = (X, Y)$.

Exercice 4. Équilibrer la réaction chimique suivante :



Exercice 5. La somme des carrés.

1. Trouver un polynôme de degré 3 tel que $P(X + 1) - P(X) = X^2$.
2. Retrouver alors l'expression de $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$.

Exercice 6. On considère les points $A = (1, 2, -1)$ et $B = (-2, 4, 0)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique et une représentation cartésienne de (AB) .
2. En fonction de $m \in \mathbb{R}$, déterminer l'intersection de (AB) avec la droite \mathcal{D}_m représentée paramétriquement par

$$\begin{cases} x = s + 3 \\ y = -2s + 2 \\ z = 2s + m \end{cases} ; \quad s \in \mathbb{R}.$$