Programme de colle : Semaine 4
Lundi 11 Octobre

I Cours

I. 1 Nombres Réels

1. Inégalités :
2. Résolution des (in)-équations...
3. Etudes de fonctions

I. 2 Nombres complexes

1. Partie réelle, partie imaginaire
2. Forme algébrique, représentation graphique.
3. Notion de conjugué, module, argument.
4. Forme trigonométrique/exponenitelle.
5. Formules d'Euler, formule de Moivre.
6. Résolution de toutes les équations de degrés 2 à coefficients réels.
7. Résolution de $z^2 = a$ avec $a \in \mathbb{C}$

I. 3 Suites Réelles

1. Principe de récurrence. Récurrence double. Récurrence forte (dans ce cas, il faut mentionner la nécessité de faire une récurrence forte)
2. Somme, produits.
3. Les étudiants doivent connaitre la valeur des sommes suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} 1, \sum_{k=0}^{n} k, \sum_{k=0}^{n} k^2, \sum_{k=0}^{n} k^3.$$
4. Sommes doubles (vu seulement vendredi)
5. Suites usuelles (arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, suite récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants)
6. Sommes téléscopiques vue en TD.
7. Théorémes de convergence sur les suites :
   — Suite croissante, majorée
   — Suites adjacentes
   — Théorèmes des gendarmes.
8. Croissance comparée (par rapport aux fonctions on ajoute $n!$ et n^n - peu vu)

II Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Savoir définir une variable.
2. Savoir manipuler des conditions (`if, elif, else`)
3. Savoir un script qui calcul une somme (boucle `for` très simples)
4. Colleurs : Pour l'instant on n'a pas fait la syntaxe sur les fonctions, donc il faut s'adapter.

III Exercices Types

III. 1 Fonctions usuelles réelles

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = (x-2)e^x + (x+2)$. Etudier g montrer que g est positif sur $\mathbb{R}_+$
2. Discuter en fonction des valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation :

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = a.$$

III. 2 Nombres complexes

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants

$$\mathbf{1}.z_1 = (2+2i)^6 \quad \mathbf{2}.z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} \quad \mathbf{3}.z_3 = \frac{(1+i)^{2000}}{(i-\sqrt{3})^{1000}}.$$

2. Linéariser $\sin^3(x)$
3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ montrer que :

$$|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

4. Soit $a, b \in]0, \pi[$. Ecrire sous forme exponentielle

$$z = \frac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}$$

III. 3 Suites Réelles

1. Donner le terme général, l'éventuelle limite et la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{-1}{2}u_n + 3$ (même chose avec les suites arithmétiques, géométriques, et SRL d'ordre 2)
2. Montrer la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par **1.** $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $\displaystyle v_n = u_n + \frac{1}{n}$
3. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Montrer que $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$. Etudier le sens de variation de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2^k + n + k + k^2)$
5. Calculer $\displaystyle C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$
6. Montrer que pour tout $x > -1$ on a $\ln(1+x) \leq x$. En déduire que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\displaystyle H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge.
7. Ecrire un script Python qui calcule les 100 premiers termes de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et affiche le 52ème et le 100ème.