

Table des matières

I	Résolution des équations trigonométriques	1
I. 1	Résolution des équations fondamentales : $\cos(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$, $\sin(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$, $\tan(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$	1
I. 1. a	Résolution de $\cos(x) = a$	1
I. 1. b	Résolution de $\sin(x) = a$	4
I. 1. c	Résolution de $\tan(x) = a$	6
I. 1. d	Résolution de $\cos(x) = \cos(y)$, $\sin(x) = \sin(y)$, $\tan(x) = \tan(y)$	7
I. 2	Résolution des autres équations	9
I. 2. a	Équation de type $a \cos(x) + b \sin(x) = c$, avec $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$	9
I. 2. b	Équation où le cosinus, sinus ou la tangente peuvent être prise comme variable	10
I. 2. c	Autres types d'équation	11
II	Résolution des inéquations trigonométriques	13
II. 1	Résolution des inéquations fondamentales	13
II. 2	Résolution des autres inéquations	13
II. 2. a	Inéquation de type $a \cos(x) + b \sin(x)$	13
II. 2. b	Inéquation où le cosinus, sinus ou la tangente peuvent être pris comme variable	14


Chapitre 6 : Trigonométrie


I Résolution des équations trigonométriques

I. 1 Résolution des équations fondamentales : $\cos(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$, $\sin(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$, $\tan(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$

I. 1. a Résolution de $\cos(x) = a$

Proposition 1. Soit $a \in [-1, 1]$. Il existe alors un unique angle θ dans $[0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = a$
On note alors $\theta = \arccos(a)$

 $\arccos(a)$ est par définition un nombre dans $[0, \pi]$.

 La fonction \arccos n'est pas défini sur \mathbb{R} , mais seulement sur $[-1, 1]$.

Valeurs particulières :

a	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arccos a$	π	$5\pi/6$	$3\pi/4$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/6$	0

Exercice 1. Résoudre sur \mathbb{R} les équations trigonométriques suivantes : $\cos(x) = -2$, $\cos(x) = -1$, $\cos(x) = 0$, $\cos(x) = \frac{1}{2}$, $\cos(x) = 1$, $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos(x) = \frac{1}{2}$. Sur $[0, \pi]$ il y a une unique solution, qui est par définition $x = \arccos(\frac{1}{2}) = \pi/3$

Sur $[-\pi, \pi]$, il y a 2 solutions, $\pi/3$ et $-\pi/3$ par symétrie de la fonction \cos .

Sur \mathbb{R} il y a une infinité de solutions données par :

$$x \equiv \pi/3 [2\pi]$$

ou

$$x \equiv -\pi/3 [2\pi]$$

Notons \mathcal{S} l'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

- Si $a > 1$ ou $a < -1$, $\mathcal{S} = \emptyset$
- Si $a = 1$, $\mathcal{S} = 2\pi\mathbb{Z}$
- Si $a = -1$, $\mathcal{S} = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$
- Si $-1 < a < 1$, $\mathcal{S} = \pm \arccos(a) + 2\pi\mathbb{Z}$

Exemple. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[0, 2\pi[$: $\cos(3x) = \frac{1}{2}$.

Correction Notons $y = 3x$. On a vu que y vérifié :

$$y \equiv \pi/3 [2\pi]$$

ou

$$y \equiv -\pi/3 [2\pi]$$

Soit en revenant à la variable x :

$$3x \equiv \pi/3 [2\pi]$$

ou

$$3x \equiv -\pi/3 [2\pi]$$

Ce qui est équivalent à

$$x \equiv \pi/9 [2\pi/3]$$

ou

$$x \equiv -\pi/9 [2\pi/3].$$

On obtient ainsi les solutions sur $[0, 2\pi[$:

- $\pi/9$,
- $\pi/9 + 2\pi/3 = 7\pi/9$,
- $\pi/9 + 4\pi/3 = 13\pi/9$
- $\pi/9 + 6\pi/3 = 19\pi/9 > 2\pi$ on est allé trop loin, $\pi/9 + 6\pi/3$ n'est pas solution sur $[0, 2\pi[$.

On refait la même chose avec $-\pi/9$:

- $-\pi/9$, (qui n'est pas solution car n'est pas dans $[0, 2\pi[$)
- $-\pi/9 + 2\pi/3 = 5\pi/9$,
- $-\pi/9 + 4\pi/3 = 11\pi/9$
- $-\pi/9 + 6\pi/3 = 17\pi/9$

Les solutions de $\cos(3x) = \frac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi[$ sont :

$$\mathcal{S} = \{\pi/9, 7\pi/9, 13\pi/9, 5\pi/9, 11\pi/9, 17\pi/9\}$$

Exercice 2. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[0, 2\pi[$: $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos(x) = \frac{7}{8}$ et représenter à chaque fois les solutions sur le cercle trigonométrique.

I. 1. b Résolution de $\sin(x) = a$

Proposition 2. Soit $a \in [-1, 1]$. Il existe alors un unique angle θ dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\theta) = a$
On note alors $\theta = \arcsin(a)$.

⚠ Par définition $\arcsin(a) \in [-\pi/2, \pi/2]$.

⚠ Le domaine de définition de \arcsin est $[-1, 1]$.

Valeurs particulières :

a	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1/2	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arcsin a$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

Exercice 3. Résoudre sur \mathbb{R} les équations trigonométriques suivantes : $\sin(x) = -6$, $\sin(x) = -1$, $\sin(x) = 0$, $\sin(x) = \frac{1}{2}$, $\sin(x) = 1$, $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sur $[-\pi/2, \pi/2]$, l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution

$$x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi/3$$

Sur $[-\pi, \pi]$ les solutions sont

$$x = \pi/3 \quad \text{ou} \quad x = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$$

Sur \mathbb{R} les solutions sont

$$\mathcal{S} = \{\pi/3 + 2k\pi, 2\pi/3 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

- Si $a > 1$ ou $a < -1$, $\mathcal{S} = \emptyset$
- Si $a = 1$, $\mathcal{S} = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$
- Si $a = -1$, $\mathcal{S} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$
- Si $-1 < a < 1$, $\mathcal{S} = \pm \arcsin(a) + 2\pi\mathbb{Z}$

$\cup \pi +$

Exemple. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[-\pi, \pi[$: $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction On a vu que les solutions de $\sin(y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ étaient données par

$$y \equiv \pi/3 [2\pi] \quad \text{ou} \quad y \equiv 2\pi/3 [2\pi].$$

Donc

$$3x \equiv \pi/3 [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x \equiv 2\pi/3 [2\pi].$$

Soit encore :

$$x \equiv \pi/9 [2\pi/3] \quad \text{ou} \quad x \equiv 2\pi/9 [2\pi/3].$$

$$- \pi/9$$

$$- \pi/9 + 2\pi/3 = 7\pi/9$$

$$- \pi/9 - 2\pi/3 = -5\pi/9$$

$$- \pi/9 - 4\pi/3 = -11\pi/9 < -\pi \text{ n'est donc pas solution sur } [-\pi, \pi[.$$

et pour $2\pi/9$

$$- 2\pi/9$$

$$- 2\pi/9 + 2\pi/3 = 8\pi/9$$

$$- 2\pi/9 - 2\pi/3 = -4\pi/9$$

$$- 2\pi/9 - 4\pi/3 = -10\pi/9 < -\pi \text{ n'est donc pas solution sur } [-\pi, \pi[.$$

Les solutions sur $[-\pi, \pi[$ sont données alors par :

$$\mathcal{S} = \{\pi/9, 2\pi/9, 7\pi/9, -5\pi/9, 8\pi/9, -4\pi/9\}$$

Exercice 4. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[-\pi, \pi[$: $\sin(4x) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(x) = \frac{1}{5}$ et représenter à chaque fois les solutions sur le cercle trigonométrique.

I. 1. c Résolution de $\tan(x) = a$

Proposition 3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Il existe alors un unique angle θ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\theta) = a$
On note alors $\theta = \arctan(a)$

Valeurs particulières :

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan a$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$

Exercice 5. Résoudre sur \mathbb{R} les équations trigonométriques suivantes : $\tan(x) = -1$, $\tan(x) = 0$, $\tan(x) = 1$, $\tan(x) = -\sqrt{3}$, $\tan(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Correction Sur $]-\pi/2, \pi/2[$, $\tan(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ admet pour solution, $x = \arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\pi/6$.

Sur \mathbb{R} les solutions sont donc :

$$\{-\pi/6 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Notons \mathcal{S} l'ensemble des solutions de l'équation $\tan(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

$$S = \{\arctan(x) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemple. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[-\pi, \pi[$: $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Correction On a vu que les solutions de $\tan(y) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ étaient

$$y \equiv -\pi/6 \pmod{\pi}$$

Donc

$$\frac{x}{2} \equiv \frac{-\pi}{6} \pmod{\pi},$$

Soit

$$x \equiv \frac{-\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Sur $[-\pi, \pi[$ les solutions sont $\{-\pi/3\}$.

Exercice 6. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[-\pi, \pi[$: $\tan(3x) = 1$ et $\tan(x) = -2$ et représenter à chaque fois les solutions sur le cercle trigonométrique.

I. 1. d Résolution de $\cos(x) = \cos(y)$, $\sin(x) = \sin(y)$, $\tan(x) = \tan(y)$

D'après les résultats précédents, on a :

$$\cos x = \cos y \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv y [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -y [2\pi] \end{cases}$$

$$\sin x = \sin y \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv y [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - y [2\pi] \end{cases}$$

$$\tan x = \tan y \Leftrightarrow x \equiv y [\pi]$$

Pour résoudre les autres équations du type $\cos(x) = \sin(y)$ on se ramène à une équation précédente par exemple en faisant $\cos(\frac{\pi}{2} - y) = \sin(y)$ et en résolvant :

$$\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - y)$$

Exercice 7. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[0, 2\pi[$: $\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ et $\tan(2x + \frac{\pi}{2}) = \tan x$ et représenter à chaque fois les solutions sur le cercle trigonométrique.

Correction Sur \mathbb{R} l'équation a pour solution

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{2} \equiv x - \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x + \frac{\pi}{2} \equiv -x + \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{2} \equiv x - \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x + \frac{\pi}{2} \equiv -x + \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{12} [2\pi/3] \end{cases}$$

On cherche les solutions appartenant à $[0, 2\pi[$:

- $-\frac{3\pi}{4} \notin [0, 2\pi[$
- $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi[$
- $-\frac{\pi}{12} \notin [0, 2\pi[$
- $-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \in [0, 2\pi[$
- $-\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{15\pi}{12} \in [0, 2\pi[$
- $-\frac{\pi}{12} + \frac{6\pi}{3} = \frac{23\pi}{12} \in [0, 2\pi[$

Les solutions dans $[0, 2\pi[$ sont :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\}.$$

I. 2 Résolution des autres équations

Méthode générale : Transformer l'expression pour se ramener à résoudre des équations fondamentales.

I. 2. a Équation de type $a \cos(x) + b \sin(x) = c$, avec $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$

Le but est de factoriser l'expression pour faire apparaître un seul cosinus. Pour cela, on cherche $r \in \mathbb{R}^+$, et $\varphi \in [0, \pi[$ tels que

$$a \cos(x) + b \sin(x) = r \cos(x - \varphi)$$

On obtient :

$$a \cos(x) + b \sin(x) = r \cos(x) \cos(\varphi) + r \sin(x) \sin(\varphi)$$

En identifiant on obtient :

$$\begin{cases} r \cos(\varphi) = a \\ \text{et} \\ r \sin(\varphi) = b \end{cases}$$

Ainsi on doit avoir $r^2 = a^2 + b^2$ et

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \text{et} \\ \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Une fois sous cette forme on résout

$$r \cos(x - \varphi) = c$$

Exemple. Résoudre $\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = 1$.

Correction On cherche $r > 0$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que $\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = r \cos(x - \varphi)$
D'après les calculs précédents on sait que nécessairement

$$r^2 = 3 + 1 = 4$$

donc $r = 2$ car $r > 0$. On a ensuite

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{et} \\ \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Ainsi

$$\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Donc l'équation $\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = 1$ équivaut à

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

Remarque. En physique, cette méthode permet de déterminer l'amplitude et la phase d'un signal défini comme la somme de deux signaux.

Exercice 8. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[0, \pi[$ les équations suivantes : $\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\cos(2x) + \sqrt{3} \sin(2x) = -\sqrt{2}$.

I. 2. b Équation où le cosinus, sinus ou la tangente peuvent être prise comme variable

Il s'agit des équations où l'on peut poser le changement de variable $X = \cos(x)$ ou $X = \sin(x)$ ou $X = \tan(x)$. On reconnaît ces équations lorsque l'on peut mettre l'équation à résoudre sous la forme d'une équation ne comportant soit que des $\cos(x)$, $\cos^2(x)$, $\cos^3(x) \dots$, soit que des $\sin(x)$, $\sin^2(x)$, $\sin^3(x) \dots$, soit que des $\tan(x)$, $\tan^2(x)$, $\tan^3(x) \dots$.

- Poser X égal à $\cos x$ ou $\sin x$ ou $\tan x$.
- Résoudre l'équation en X du second, troisième... degré ainsi obtenue.
- Revenir ensuite à x en résolvant des équations fondamentales.

Exemple. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[0, 2\pi[$ l'équation : $2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$.

Correction On pose $X = \cos(x)$ on obtient

$$2X^2 + X - 1 = 0,$$

dont les solutions sont $X = -1$ et $X = \frac{1}{2}$. L'équation est équivalente à

$$\begin{cases} \cos(x) = -1 \\ \text{ou} \\ \cos(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv \pi [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{\pi}{3}, [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{3}, [2\pi] \end{array} \right.$$

Sur $[0, 2\pi[$ les solutions sont donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}.$$

Exercice 9. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[0, 2\pi[$ les équations suivantes : $4 \cos^2(x) - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cos(x) + \sqrt{6} = 0$, $\tan^3(x) - \sqrt{3} \tan^2(x) - \tan(x) + \sqrt{3} = 0$ et $2 \sin^2(x) + 5 \cos(x) - 4 = 0$.

I. 2. c Autres types d'équation

Lorsqu'on est dans aucun des cas précédents, on utilise les formules trigonométriques pour se ramener à une équation factorisée dont chaque terme est une équation fondamentale.

Exemple. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[-\pi, \pi[$: $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.

Correction

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \Re(e^{3ix}) \\ &= \Re(e^{ix^3}) \\ &= \Re((\cos(3x) + i \sin(x))^3) \\ &= \cos^3(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) \\ &= \cos^3(x) - 3 \cos(x)(1 - \cos^2(x)) \\ &= 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) &= 1 + \cos(x) + 2 \cos^2(x) - 1 + 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x) \\ &= -2 \cos(x) + 2 \cos^2(x) + 4 \cos^3(x) \end{aligned}$$

L'équation est donc équivalente à

$$-\cos(x) + \cos^2(x) + 2 \cos^3(x) = 0.$$

On fait le changement de variable $X = \cos(x)$ on obtient :

$$-X + X^2 + 2X^3 = 0$$

Soit

$$X(2X^2 + X - 1) = 0$$

Les solutions sont donc $X = 0$ ou $2X^2 + X - 1 = 0$. En revenant à la variable x on obtient $\cos(x) = 0$ si et seulement si $x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ Les solutions sont donc

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv \pi [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{\pi}{3}, [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\frac{\pi}{3}, [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \end{array} \right.$$

Exercice 10. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[-\pi, \pi[$: $\cos(2x) + \cos(x) = \sin(2x) + \sin(x)$.

Correction On utilise les formules d'additivité de cosinus et sinus :

$$\cos(2x) + \cos(x) = 2 \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin(2x) + \sin(x) = 2 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

On obtient donc l'équation :

$$\cos\left(\frac{3x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

soit

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \right) = 0$$

Ce qui équivaut

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos\left(\frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ \text{ou} \\ \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\right) \end{array} \right.$$


$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv \pi [2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{3x}{2} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\right) [2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{3x}{2} = \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{3x}{2}\right) [2\pi] \end{array} \right.$$

II Résolution des inéquations trigonométriques

II. 1 Résolution des inéquations fondamentales

Les inéquations fondamentales sont les inéquations de type $\cos x \leq a$, $\sin x \geq a$, $\tan x < a$.

On résout GRAPHIQUEMENT sur le cercle trigonométrique.

Remarque.  Ne jamais résoudre une inéquation sans passer par le cercle trigonométrique.

Exemple. Résoudre sur $[0, 2\pi[$ puis sur \mathbb{R} l'inéquation : $\cos(x) < \frac{1}{2}$.

Correction Sur $[0, 2\pi[$ les solutions sont

$$\left] \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3} \right[= \left] \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right[$$

Sur \mathbb{R} les solutions sont

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right[$$

Exercice 11. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[0, 2\pi[$ les inéquations suivantes : $\sin(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(2x) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(3x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan(x) \geq -1$ et $-1 < \tan(x) < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

II. 2 Résolution des autres inéquations

II. 2. a Inéquation de type $a \cos(x) + b \sin(x)$

Exemple. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[0, \pi[$: $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) > \sqrt{2}$.

Correction On va mettre $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x)$ sous la forme $r \cos(x - \varphi)$ pour $r > 0$ et $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

On a vu que $r^2 = 3 + 1 = 4$, ce qui donne $r = 2$.

Donc $\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\varphi) = \frac{-1}{2}$ D'où $\varphi = \frac{-\pi}{6}$.

Donc l'équation devient

$$2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{2}.$$

Soit

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc sur $] - \pi, \pi]$:

$$-\frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}$$

Soit

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \\ -\frac{5\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

Donc sur \mathbb{R} les solutions sont données par :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, \frac{\pi}{12} + 2k\pi \right[$$

Exercice 12. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[0, \pi[$ les inéquations suivantes : $\cos(x) - \sin(x) \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) \leq -\sqrt{2}$.

II. 2. b Inéquation où le cosinus, sinus ou la tangente peuvent être pris comme variable

Exemple. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[0, 2\pi[$ l'inéquation : $2\cos^2(x) + \cos(x) > 1$.

Correction $2X^2 + X - 1 > 0$ a pour solution

$$X \in] - \infty, -1[\cup] \frac{1}{2}, \infty[$$

Donc l'équation $2\cos^2(x) + \cos(x) > 1$ est équivalente à

$$\cos(x) > \frac{1}{2}$$

Exercice 13. Résoudre sur \mathbb{R} puis sur $[0, 2\pi[$ les inéquations suivantes : $4\cos^2(x) - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})\cos(x) + \sqrt{6} < 0$, $\tan^3(x) - \sqrt{3}\tan^2(x) - \tan(x) + \sqrt{3} \geq 0$ et $2\sin^2(x) + 5\cos(x) - 4 \leq 0$.