TD 5 - Logique et Ensemble

I Raisonnements : implication, équivalence

Exercice 1. Compléter les pointillés par le connecteur logique $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$ en justifiant votre choix.

1. $x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4 \ldots\ldots x = 2$.
2. $z \in \mathbb{C},\ z = -\overline{z} \ldots\ldots z \in i\mathbb{R}$.
3. $x \in \mathbb{R},\ x = \dfrac{\pi}{2} \ldots\ldots e^{4ix} = 1$.

Exercice 2. On considère les deux propositions suivantes : A : « m et n sont deux entiers pairs », et B : « $m+n$ est un entier pair ». A-t-on $A \Rightarrow B$? $B \Rightarrow A$? $A \Leftrightarrow B$?

Exercice 3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer l'équivalence suivante : $(x^2 + y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$.

Exercice 4. Montrer que si x et y sont deux réels qui vérifient $x + y > 2$, alors au moins un des deux est strictement supérieur à 1.

Exercice 5. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que la propriété suivante est vraie : $P :\ (\forall \varepsilon > 0,\ x \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.

II Logique et quantificateurs

Exercice 6. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$.
2. $\exists y \in \mathbb{R},\ y \geq 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$.
4. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x = y^2$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x = y^2$.
6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.

Exercice 7. Soit (f, g) deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs les énoncés suivants puis les nier.

1. L'application f est croissante.
2. Il existe un réel positif x tel que $f(x) \geq 0$.
3. La fonction f est paire.
4. La fonction f ne s'annule jamais.
5. La fonction f est inférieure à la fonction g.
6. La fonction f est périodique.

Exercice 8. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $1 \leq x < y$.
2. $(x^2 = 1) \Longrightarrow x = 1$.
3. $\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ (x \neq x') \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$.

III Ensembles

Exercice 9.

1. Donner deux écritures de l'ensemble des complexes de partie réelle positive.
2. Montrer que $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x+y=1\right\} = \{(x,1-2x),\ x \in \mathbb{R}\}$. Représenter graphiquement cet ensemble.

Exercice 10. Soit E un ensemble. Pour tous sous-ensembles A et B de E, on définit la différence symétrique de A et B par

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Montrer que : $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

Exercice 11. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que

$$A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B.$$

Exercice 12. Soit E un ensemble. Montrer par contraposition l'assertion suivante :

$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C.$$

Exercice 13. Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que :

$$(A \cup B = A \cap C) \Leftrightarrow B \subset A \subset C.$$

Exercice 14. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x-y=2\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (3x+y+2)(x+2y+4) \geq 0\right\}.$$

Représenter graphiquement A et B et montrer que $A \subset B$. A-t-on égalité ?

Exercice 15.

1. Soit $E = \{1\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
2. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ pour $E = \{a, b, c, d\}$ avec a, b, c, d deux à deux distincts.
3. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ pour un ensemble à deux éléments.