

Correction : TD équations différentielles

Je ne détaille pas tous les calculs.

I Équations différentielles linéaires du premier ordre

Correction 1.

1. $y' - 2y = x + x^2$ sur \mathbb{R} :

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y' - 2y = 0$:

★ La fonction $a : x \mapsto a(x) = -2$ est continue sur \mathbb{R} donc il existe une primitive A de a sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = -2x$.

★ La solution générale de l'équation homogène associée est alors : $y_h(x) = Ce^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - 2y = x + x^2$: Comme la fonction a est constante et que le second membre est de type polynôme, on peut chercher cette solution sous la forme : $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On obtient ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ que : $-2ax^2 + (-2b + 2a)x + b - 2c = x + x^2$. Par identification des

$$\text{coefficients, on obtient : } \begin{cases} -2a & = & 1 \\ -2b + 2a & = & 1 \\ b - 2c & = & 0 \end{cases} . \text{ Ainsi, on obtient que : } y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}.$$

- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$

2. $3y' - 2y = x$ sur \mathbb{R} :

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- Résolution de l'équation homogène associée : $3y' - 2y = 0 \iff y' - \frac{2}{3}y = 0$:

★ La fonction $a : x \mapsto a(x) = -\frac{2}{3}$ est continue sur \mathbb{R} donc il existe une primitive A de a sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = -\frac{2}{3}x$.

★ La solution générale de l'équation homogène associée est alors : $y_h(x) = Ce^{\frac{2}{3}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}x$: Comme la fonction a est constante et que le second membre est de type polynôme, on peut chercher cette solution sous la forme : $y_p(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On obtient ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ que : $a - \frac{2}{3}(ax + b) = \frac{1}{3}x$. Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}a & = & 1 \\ a - \frac{2}{3}b & = & 0 \end{cases} . \text{ Ainsi, on obtient que : } y_p(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{9}{4}.$$

- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :

$$y(x) = Ce^{\frac{2}{3}x} - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$

3. $y' = y + 1$ sur \mathbb{R} :

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y' - y = 0$:
 - ★ La solution générale de l'équation homogène associée est alors : $y_h(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - y = 1$:
On cherche y_p sous forme constante on trouve $y_p(x) = -1$.
- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :
 $y(x) = Ce^x - 1$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

4. $y' = -y + e^x$ sur \mathbb{R} :

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y' + y = 0$:
 - ★ La solution générale de l'équation homogène associée est alors : $y_h(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' + y = e^x$:
On cherche y_p sous forme ae^x avec $a \in \mathbb{R}$ on trouve $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x$.
- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :
 $y(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

Correction 2.

1. $(1 + x^2)y' + 2xy = 1$ sur \mathbb{R} :

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre. Comme on a $1 + x^2 \neq 0$ sur \mathbb{R} , il est équivalent de résoudre $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 0$:
 - ★ La fonction $a : x \mapsto a(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ est continue sur \mathbb{R} car $1 + x^2 > 0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif et ainsi on a toujours $1 + x^2 \neq 0$. Donc il existe une primitive A de a sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \ln|1 + x^2| = \ln(1 + x^2)$.
 - ★ La solution générale de l'équation homogène est alors : $y_h(x) = Ce^{-\ln(1+x^2)} = \frac{C}{1+x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$:
On utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \frac{C(x)}{1+x^2}$ avec C une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Ainsi y_p est bien dérivable sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ comme composée et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\ast}$, on obtient :
$$y'_p(x) + \frac{2x}{1+x^2}y_p(x) = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \frac{C'(x)}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow C'(x) = 1,$$
ainsi on peut prendre $C(x) = x$.
- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :
 $y(x) = \frac{C+x}{1+x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

2. $x^2 y' - y = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+\ast}$:

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre.
Comme on la résout sur $\mathbb{R}^{+\ast}$, on a : $x^2 \neq 0$ et ainsi il est équivalent de résoudre : $y' - \frac{y}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y' - \frac{y}{x^2} = 0$:
 - ★ La fonction $a : x \mapsto a(x) = -\frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\ast}$, $A(x) = \frac{1}{x}$.
 - ★ La solution générale de l'équation homogène est alors : $y_h(x) C e^{-\frac{1}{x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - \frac{y}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$:
En utilisant la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = C(x) e^{-\frac{1}{x}}$ avec C fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+\ast}$. Ainsi y_1 est bien dérivable sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ comme composée et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\ast}$, on obtient :

$$y'_p(x) - \frac{y_p(x)}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \Leftrightarrow C'(x) = \frac{1}{x^2}$$

en simplifiant par $e^{-\frac{1}{x}} \neq 0$. Ainsi pour tout $x > 0$: $C(x) = -\frac{1}{x}$

Ainsi : $y_p(x) = \frac{-1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$ est une solution particulière.

- Conclusion :

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors : $y(x) = \left(C - \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

3. $xy' - (1 + 2x)y = -x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}^{+\ast}$:

La solution générale est $y(x) = C x e^{2x} + (x^2 - x) e^x$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

4. $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$ sur \mathbb{R} :

La solution générale est $y(x) = C e^{x^2} + e^x$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

5. $y' - \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)} y = 2$:

Il faut résoudre sur les intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 0[$, $] 0, 1[$ et $] 1, +\infty[$. Je ne corrige ici que le dernier cas, les autres sont similaires.

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y' - \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)} y = 0$:

★ La fonction $a : x \mapsto a(x) = -\frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}$ est continue sur $] 1, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc il existe une primitive A de a sur $] 1, +\infty[$. Calculons une primitive de a : pour cela, on écrit a sous la forme

$$a(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2 - 1}$$

Par identification, on obtient $\alpha = 1$, $\beta = -2$ et $\gamma = 0$, donc on a $a(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - 1}$.

Une primitive de a sur $] 1, +\infty[$ est donc $A(x) = \ln|x| - \ln|x^2 - 1| = \ln x - \ln(x^2 - 1)$.

★ La solution générale de l'équation homogène est alors : $y_h(x) = C e^{-\ln x + \ln(x^2 - 1)} = C \frac{x^2 - 1}{x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre :
On utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = C \frac{x^2 - 1}{x}$ avec C une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Ainsi y_p est bien dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in]1, +\infty[$, on obtient :

$$y_p' - \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)} y_p = 2 \Leftrightarrow C'(x) \frac{x^2 - 1}{x} = 2 \Leftrightarrow C'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1},$$

ainsi on peut prendre $C(x) = \ln|x^2 - 1| = \ln(x^2 - 1)$ sur $]1, +\infty[$.

- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :

$$y(x) = (C + \ln(x^2 - 1)) \frac{x^2 - 1}{x} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$

6. $y' + \cos^3(x)y = 0$ sur \mathbb{R} :

La solution générale est $y(x) = C e^{-\frac{1}{12} \sin(3x) - \frac{3}{4} \sin x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

7. $y' + \frac{2}{x^2 - 1} y = x$ sur $]1, +\infty[$:

La solution générale est $y(x) = (C + \frac{x^2}{2} - 2x + 2 \ln(x + 1)) \frac{x + 1}{x - 1}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

Correction 3. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes

1. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$:

La solution générale est : $y(x)(C + x)(1 + x^2)$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

2. $y' + \frac{1 - 2x}{x^2} y = 1$:

On se place par exemple sur $]0, +\infty[$, la résolution est similaire sur $] - \infty, 0[$.

La solution générale sur $]0, +\infty[$ est : $y(x) = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

3. $y' - y = x^2(e^x + e^{-x})$:

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y' - y = 0$:

★ La fonction $a : x \mapsto a(x) = -1$ est continue sur \mathbb{R} donc il existe une primitive A de a sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = -x$.

★ La solution générale de l'équation homogène associée est alors : $y_h(x) = C e^x$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - y = x^2 e^x + x^2 e^{-x}$:

On applique ici le principe de superposition.

★ Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - y = x^2 e^x$:
Comme la fonction a est constante et que le second membre est de type polynôme et exponentielle, on peut chercher cette solution sous la forme : $y_1 : x \mapsto (bx^2 + cx + d)e^x \times x$ car $a = -1$ avec $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$. On obtient ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ en divisant par $e^x \neq 0$ que :
 $3bx^2 + 2cx + d = x^2$. Par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient ainsi que : $y_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x^3}{3} e^x$.

★ Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' - y = x^2 e^{-x}$:
Comme la fonction a est constante et que le second membre est de type polynôme et exponentielle, on peut chercher cette solution sous la forme : $y_2 : x \mapsto (bx^2 + cx + d)e^{-x}$ avec $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$. On obtient ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ en divisant par $e^{-x} \neq 0$ que :

$-2bx^2 + (2b - 2c)x + (c - 2d) = x^2$. Par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient ainsi que : $y_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) e^x$.

★ D'après le principe de superposition, on obtient donc que une solution particulière est : $y_p = y_1 + y_2$.

• Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :

$$y(x) = Ce^x + \frac{x^3}{3}e^x - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) e^x \text{ avec } C \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$

4. $\mathbf{xy}' + (\mathbf{1} - \mathbf{2x})\mathbf{y} = \mathbf{1}$:

On se place par exemple sur $]0, +\infty[$, la résolution est similaire sur $] - \infty, 0[$.

La solution générale sur $]0, +\infty[$ est $y(x) = \frac{C}{x}e^{2x} - \frac{1}{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

5. $\mathbf{x^3y}' + \mathbf{4(1 - x^2)y} = \mathbf{0}$:

La solution générale sur $]0, +\infty[$ est $y(x) = Cx^4e^{\frac{2}{x^2}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

6. $\mathbf{(1 - x^2)y}' - \mathbf{2xy} = \mathbf{1}$:

On se place par exemple sur $]1, +\infty[$, la résolution est similaire sur $] - \infty, -1[$ et $] - 1, 1[$.

La solution générale sur $]1, +\infty[$ est $y(x) = \frac{C - x}{x^2 - 1}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

7. $(\tan \mathbf{x})\mathbf{y}' + \mathbf{y} - \sin \mathbf{x} = \mathbf{0}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$:

• On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Comme on la résout sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $\tan(x) \neq 0$ et ainsi il est équivalent de résoudre :

$$y' + \frac{y}{\tan(x)} = \cos(x).$$

• Résolution de l'équation homogène associée : $y' + \frac{y}{\tan(x)} = 0$:

★ La fonction $a : x \mapsto a(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc il existe une primitive

A de a sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $A(x) = \ln |\sin(x)|$. Comme on est sur $]0, \frac{\pi}{2}[$: $\sin(x) > 0$ et ainsi on obtient que : $A(x) = \ln(\sin(x))$.

★ La solution générale de l'équation homogène est alors : $y(x) = \frac{C}{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

• Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' + \frac{y}{\tan(x)} = \cos(x)$:

En utilisant la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = \frac{C(x)}{\sin(x)}$ avec C fonction dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi y_p est bien

dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ comme quotient de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on

obtient : $y_p'(x) + \frac{y_p(x)}{\sin(x)} = \cos(x) \Leftrightarrow C'(x) = \cos(x) \sin(x)$. Ainsi pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$C(x) = \ln |\sin(x)| = \ln(\sin(x))$$

Ainsi : $y_p(x) = \frac{\ln(\sin(x))}{\sin(x)}$ est une solution particulière.

• Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :

$$y_p(x) = \frac{C + \ln(\sin(x))}{\sin(x)} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \text{ constante.}$$

8. $\mathbf{y}' + (\tan \mathbf{x})\mathbf{y} = \sin \mathbf{x} + \cos^3 \mathbf{x}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$:

La solution générale est $y(x) = \left(C + \frac{1}{2} \sin^2(x) + \frac{1}{32} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{2}x \right) \frac{\cos x}{\sin x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

9. $x^2y' - y = x^2 - x + 1$ sur $]0, +\infty[$. On pourra vérifier que cette équation différentielle admet une fonction polynomiale comme solution particulière. :

La solution générale est $y(x) = Ce^{-\frac{1}{x}} + x - 1$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

Correction 4. Problèmes de raccord de solutions définies sur des intervalles disjoints :

1. On considère l'équation différentielle (E) : $xy' + y = 1$.

- Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ puis sur $\mathbb{R}^{-\ast}$.

La solution générale sur $\mathbb{R}^{+\ast}$ est $y(x) = \frac{C_1}{x} + 1$ avec $C_1 \in \mathbb{R}$ constante.

La solution générale sur $\mathbb{R}^{-\ast}$ est $y(x) = \frac{C_2}{x} + 1$ avec $C_2 \in \mathbb{R}$ constante.

- Montrer que (E) admet une unique solution sur \mathbb{R} .

On cherche une fonction y dérivable sur \mathbb{R} vérifiant $xy' + y = 1$. D'après la question précédente, il existe C_1 et C_2 deux constantes telles que

$$y(x) = \begin{cases} \frac{C_1}{x} + 1 & \text{sur }]0, +\infty[\\ \frac{C_2}{x} + 1 & \text{sur }]-\infty, 0[. \end{cases}$$

Or y doit être dérivable sur \mathbb{R} , donc continue sur \mathbb{R} , et en particulier continue en 0. Il faut pour cela que l'on ait $C_1 = C_2 = 0$, car sinon la limite en 0 de $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas finie. Donc on a nécessairement $y : x \mapsto 1$. On vérifie que cette fonction est bien solution. On a donc montré que la seule solution sur \mathbb{R} est $y : x \mapsto 1$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $(1 - x^2)y' - 2xy = x^2$. On obtient de la même façon qu'il existe C_1, C_2 et C_3 trois constantes telles que

$$y(x) = \begin{cases} \frac{C_1 - \frac{x^3}{3}}{x^2 - 1} & \text{sur }]-\infty, -1[\\ \frac{C_2 - \frac{x^3}{3}}{x^2 - 1} & \text{sur }]-1, 1[\\ \frac{C_3 - \frac{x^3}{3}}{x^2 - 1} & \text{sur }]1, +\infty[. \end{cases}$$

On veut prolonger cette fonction en -1 et 1 pour obtenir une fonction dérivable. Il faut en particulier que les limites à gauche et à droite soient finies. Regardons par exemple en -1^- : on a $\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 1 = 0$, donc pour avoir une limite finie en -1^- , il faut que le numérateur tende vers

0 également. Or on a $\lim_{x \rightarrow -1^-} C_1 - \frac{x^3}{3} = 0$ si et seulement si $C_1 = -\frac{1}{3}$. Dans ce cas, la fonction y s'écrit :

$$y(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1 + x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{3} \times \frac{1 + x + x^2}{1 + x},$$

et a bien une limite finie en -1^- .

On trouve de même que pour avoir une limite finie en -1^+ , il faut nécessairement avoir $C_2 = -\frac{1}{3}$.

On peut donc avoir un raccord en -1 , et obtenir comme solution $y(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1 - x + x^2}{x - 1}$, dont on vérifie qu'elle est bien dérivable sur $] -\infty, 1[$.

On montre de même que l'on peut avoir un raccord en 1 en prenant cette fois $C_2 = \frac{1}{3}$, et $C_3 = \frac{1}{3}$.

La solution sur $] - 1, +\infty[$ est cette fois $y(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1+x+x^2}{1+x}$.

Cependant, on ne peut pas avoir un raccord à la fois en -1 et en 1 . En effet, les conditions pour les raccords sont incompatibles : il faudrait avoir à la fois $C_2 = -\frac{1}{3}$ et $C_2 = \frac{1}{3}$, ce qui est impossible.

3. **On considère l'équation différentielle (E) : $(x \ln x)y' - y = 0$.** On obtient qu'il existe C_1 et C_2 deux constantes telles que

$$y(x) = \begin{cases} -C_1 \ln x & \text{sur }]0, 1[\\ C_2 \ln x & \text{sur }]1, +\infty[. \end{cases}$$

Les limites en 1^- et 1^+ sont bien finies, et valent 0 quelles que soient les valeurs de C_1 et C_2 , donc y peut être prolongée par continuité en 1 en posant $y(1) = 0$. On cherche maintenant à quelles conditions ce prolongement est dérivable. Calculons le taux d'accroissement à gauche de 1 :

$$\frac{y(x) - y(1)}{x - 1} = \frac{-C_1 \ln x - 0}{x - 1} = -C_1 \frac{\ln x}{x - 1}.$$

On pose $X = x - 1$. On a cherché donc la limite de $-C_1 \frac{\ln(X+1)}{X}$ quand X tend vers 0^- :

comme on a $\ln(X+1) \sim_0 X$, cette limite vaut $-C_1$. De même, on obtient $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{y(x) - y(1)}{x - 1} = C_2$.

Pour que y soit dérivable, il suffit donc que l'on ait $-C_1 = C_2$. Ainsi, l'équation différentielle (E) admet une infinité de solutions sur \mathbb{R} , qui sont données par $y : x \in]0, +\infty[\mapsto C \ln x$, avec C une constante.

4. **On considère l'équation différentielle (E) : $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$.**

On obtient qu'il existe C_1 et C_2 deux constantes telles que

$$y(x) = \begin{cases} \frac{C_1 + x - \arctan x}{x^2} & \text{sur }]-\infty, 0[\\ \frac{C_2 + x - \arctan x}{x^2} & \text{sur }]0, +\infty[. \end{cases}$$

Grâce à un DL de la fonction \arctan en 0 , on montre que la fonction $x \mapsto \frac{x - \arctan x}{x^2}$ se prolonge en 0 en une fonction dérivable sur \mathbb{R} . On en déduit que y se prolonge en une fonction dérivable si et seulement si on peut prolonger $\frac{C_1}{x}$ et $\frac{C_2}{x}$. Or les limites en 0 ne sont finies que si $C_1 = C_2 = 0$. On a donc une unique solution sur \mathbb{R} de (E), c'est le prolongement de la fonction

$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x - \arctan x}{x^2}.$$

Correction 5. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants en précisant à chaque fois l'intervalle de travail (mais sans étudier les problèmes de raccord) :

1. **$y' \cos x - y \sin x = 0$ et $y(0) = 1$:**

On résout sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, un intervalle contenant 0 sur lequel la fonction cosinus ne s'annule pas. Il est alors équivalent de résoudre

$$y' - \frac{\sin x}{\cos x} y = 0.$$

On obtient comme solution générale $y(x) = \frac{C}{\cos x}$. Déterminons la constante C grâce à la condition initiale en 0 . On a $y(0) = 1 = \frac{C}{\cos 0}$, donc on a $C = 1$. On en déduit que l'unique solution

vérifiant $y(0) = 1$ est $y : x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto \frac{1}{\cos x}$.

2. **$y' + xy = 2x$ et $y(0) = 1$:**

- On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y' + xy = 0$:
 - ★ La fonction $a : x \mapsto a(x) = x$ est continue sur \mathbb{R} donc il existe une primitive A de a sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \frac{x^2}{2}$.
 - ★ La solution générale de l'équation homogène est alors : $y_h(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre : $y' + xy = 2x$:
En utilisant la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec C fonction dérivable sur \mathbb{R} . Ainsi y_p est bien dérivable sur \mathbb{R} comme composée et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient : $y_p'(x) + xy_p(x) = 2x \Leftrightarrow C'(x) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$: $C(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}}$, et $y_p(x) = 2$ est une solution particulière.
- Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors : $y(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.
- Étude de la condition initiale :
Comme $y(0) = 1$, on a : $y(0) = Ce^0 + 2 = C + 2 = 1 \Leftrightarrow C = -1$. Ainsi il existe une unique solution qui est : $y : x \in \mathbb{R} \mapsto 2 - e^{-\frac{x^2}{2}}$.

II Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Correction 6. Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y'' + 4y' + 4y = x^2e^x$:

- ★ On reconnaît une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
- ★ Résolution de l'équation homogène associée : $y'' + 4y' + 4y = 0$
L'équation caractéristique associée est : $r^2 + 4r + 4 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 0$ et la solution est $r_0 = -2$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est : $y_h(x) = (A + Bx)e^{-2x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.
- ★ Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre $y'' + 4y' + 4y = x^2e^x$:
Le second membre est de la forme $P(x)e^{mx}$ avec $m = 1$ non racine de l'équation caractéristique. On cherche alors y_1 sous la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a alors :

$$y_p'(x) = (2ax + b + ax^2 + bx + c)e^x = (ax^2 + (2a + b)x + b + c)e^x,$$

puis on en déduit :

$$y_p''(x) = (2ax + 2a + b + ax^2 + (2a + b)x + b + c)e^x = (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c)e^x.$$

Or on sait que $y_p''(x) + 4y_p'(x) + 4y_p(x) = x^2e^x$, donc on obtient :

$$(ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c + 4(ax^2 + (2a + b)x + b + c) + 4(ax^2 + bx + c))e^x = x^2e^x.$$

En divisant par e^x , et en identifiant les coefficients du polynôme, on obtient : $a = \frac{1}{9}$, $b = -\frac{4}{27}$ et $c = -\frac{2}{27}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y_p(x) = \left(\frac{x^2}{9} - \frac{4x}{27} - \frac{2}{27}\right)e^x$.

- ★ Conclusion : la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors :

$$y(x) = (A + Bx)e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{9} - \frac{4x}{27} - \frac{2}{27}\right)e^x \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ constantes.}$$

2. $y'' + 4y' + 4y = x^2 e^{-2x}$:

On a déjà résolu l'équation homogène associée.

Le second membre est cette fois de la forme $P(x)e^{mx}$ avec $m = -2$ racine double de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_p(x) = x^2(ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On obtient par identification : $a = \frac{1}{12}$, $b = 0$ et $c = 0$.

La solution générale est alors : $y(x) = \left(A + Bx + \frac{1}{12}x^2 \right) e^{-2x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.

3. $y'' + 4y' + 4y = \sin(x) e^{-2x}$:

On a déjà résolu l'équation homogène associée.

Le second membre est cette fois de la forme

$$f(x) = \sin(x) e^{-2x} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} e^{-2x} = \frac{1}{2} e^{(-2+i)x} - \frac{1}{2} e^{-(2+i)x}.$$

On utilise alors le principe de superposition : on cherche tout d'abord une solution particulière pour l'équation $y'' + 4y' + 4y = \frac{1}{2} e^{(-2+i)x}$. Comme $-2 + i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on la cherche sous la forme $y_1(x) = a e^{(-2+i)x}$. Par identification, on trouve $A = -\frac{1}{2}$.

On cherche ensuite une solution particulière pour l'équation $y'' + 4y' + 4y = -\frac{1}{2} e^{-(2+i)x}$. On la cherche sous la forme $y_2(x) = b e^{-(2+i)x}$. Par identification, on trouve $b = \frac{1}{2}$.

La solution générale est alors $y = y_h + y_1 + y_2$, soit : $y(x) = (A + Bx) e^{-2x} - \frac{1}{2} e^{(-2+i)x} + \frac{1}{2} e^{-(2+i)x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes. On simplifie pour retrouver une solution réelle, et on obtient $y(x) = (A + Bx - \sin x) e^{-2x}$.

4. $y'' - 6y' + 9y = e^x$:

La solution générale est $y(x) = (A + Bx)e^{3x} + \frac{1}{4}e^x$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

5. $y'' - 2y' + 2y = x^2 + x$:

★ On reconnaît une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

★ Résolution de l'équation homogène associée : $y'' - 2y' + 2y = 0$.

L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 2r + 2 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -4$ et les deux solutions complexes conjuguées sont $r_1 = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est : $y_h(x) = (A \cos(x) + B \sin(x))e^x$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.

★ Recherche d'une solution particulière : on a cherché une solution sous la forme d'un polynôme de degré 2, soit $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. Par identification, on obtient $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = 1$.

★ Conclusion : la solution générale est $y(x) = (A \cos(x) + B \sin(x))e^x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

6. $2y'' - y' - y = e^x + e^{-x}$:

La solution générale est $y(x) = Ae^x + Be^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}e^{-x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

7. $y'' - 2y' + 3y = \cos x$:

La solution générale est $y(x) = (A \cos(\sqrt{2}x) + B \sin(\sqrt{2}x))e^x + \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \sin x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

8. $4y'' + 4y' + y = x + x^2 + 3 \sin x + e^{3x} + xe^{-\frac{x}{2}}$:

La solution générale est

$$y(x) = (A + Bx)e^{-\frac{x}{2}} + x^2 - 7x + 20 - \frac{12}{25} \cos x - \frac{9}{25} \sin x + \frac{1}{49}e^{3x} + \frac{1}{24}x^3e^{-\frac{x}{2}}, \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

9. $y'' - my + y = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$:

La solution générale est $y(x) = (A + Bx)e^{3x} + \frac{1}{4}e^x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

10. $y'' + y = x^2 \cos x$:

La solution générale est $y(x) = (A + Bx)e^{3x} + \frac{1}{4}e^x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

11. $y'' + y = \cos x + \sin(2x)$:

La solution générale est $y(x) = (A + Bx)e^{3x} + \frac{1}{4}e^x$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Correction 7. Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. $y'' + 8y' + 15y = 5$

On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

- Équation homogène associée : $y'' + 8y' + 15y = 0$. On étudie l'équation caractéristique associée : $r^2 + 8r + 15 = 0$. Ses solutions sont réelles distinctes, données par $r_1 = -5$ et $r_2 = -3$. Les solutions sont donc données par $y_h(t) = Ae^{-5t} + Be^{-3t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- Solution particulière constante : $y_p(t) = \alpha$. On a alors $y'_p(t) = y''_p(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + 15\alpha = 5$, soit $\alpha = \frac{1}{3}$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \{y : t \mapsto Ae^{-5t} + Be^{-3t} + \frac{1}{3}\}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

On étudie à présent les conditions initiales. On a $y(0) = 0$, soit $A + B + \frac{1}{3} = 0$. De plus, on doit avoir $y'(0) = 0$. Or on a : $q'(t) = -5Ae^{-5t} - 3Be^{-3t}$, donc $q'(0) = -5A - 3B = 1$. On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} A + B = -\frac{1}{3} \\ -5A - 3B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

La solution est donc donnée par $y(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})$.

2. $4y'' - 4y' + y = 4$

On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

- Équation homogène associée : $4y'' - 4y' + y = 0$. On étudie l'équation caractéristique associée : $4r^2 - 4r + 1 = 0$. Cette équation admet une solution double, donnée par $r = \frac{1}{2}$. Les solutions sont donc données par $y_h(t) = Ae^{\frac{t}{2}} + Bte^{\frac{t}{2}}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- Solution particulière constante : $y_p(t) = \alpha$. On a alors $y'_p(t) = y''_p(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + \alpha = 4$, soit $\alpha = 4$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \{y : t \mapsto Ae^{\frac{t}{2}} + Bte^{\frac{t}{2}} + 4\}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. On étudie à présent les conditions initiales. On a $y(0) = 0$, soit $A = 0$. De plus, on doit avoir $y'(0) = 0$. Or on a : $y'(t) = \frac{A}{2}e^{\frac{t}{2}} + Be^{\frac{t}{2}} + \frac{B}{2}te^{\frac{t}{2}}$, donc $y'(0) = \frac{A+B}{2} = 1$, soit $B = 2$. La solution est donc donnée par $y(t) = 2te^{\frac{t}{2}} + 4$.

3. $y'' - 2y' + 5y = 5$

On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

- Équation homogène associée : $y'' - 2y' + 5y = 0$. On étudie l'équation caractéristique associée : $r^2 - 2r + 5 = 0$. Ses solutions sont réelles distinctes, données par $r_1 = -5$ et $r_2 = -3$. Les solutions sont donc données par $y_h(t) = Ae^{-5t} + Be^{-3t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

- Solution particulière constante : $y_p(t) = \alpha$. On a alors $y'_p(t) = y''_p(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + 5\alpha = 5$, soit $\alpha = 1$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \{y : t \mapsto e^t(A \cos(2t) + B \sin(2t)) + 1\}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

On étudie à présent les conditions initiales. On a $y(0) = 0$, soit $A + 1 = 0$, donc $A = -1$. De plus, on doit avoir $y'(0) = 0$. Or on a : $y'(t) = e^t(A \cos(2t) + B \sin(2t)) + e^t(-2A \sin(2t) + 2B \cos(2t))$, donc $y'(0) = A + 2B = 1$. On en déduit $B = \frac{1 - A}{2} = 1$. La solution est donc donnée par

$$y(t) = e^t(-\cos(2t) + \sin(2t)) + 1.$$

4. $y'' - 2y' = 2$

On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants. Cependant, ici le coefficient du terme y est nul : on se ramène à une équation du premier ordre, en $z = y'$.

On commence donc par résoudre l'équation $z' - 2z = 2$. La solution de l'équation homogène associée sont de la forme $z_h(t) = Ce^{2t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière constante : $z_p(t) = \alpha$. On obtient $\alpha = -1$. Les solutions générales sont donc de la forme $z(t) = Ce^{2t} - 1$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Revenons à présent à y : on a $y' = z$, donc y est une primitive de z . On en déduit que y s'écrit sous la forme : $y(t) = \frac{C}{2}e^{2t} - t + K$, où $(C, K) \in \mathbb{R}^2$.

On utilise les conditions initiales pour déterminer C et K : on a $y(0) = 0$, soit $\frac{C}{2} + K = 0$. De plus, on a $y'(t) = Ce^{2t} - 1$, donc $y'(0) = 1$ donne $C - 1 = 1$, soit $C = 2$. En revenant à l'équation $\frac{C}{2} + K = 0$, on obtient alors $K = -1$. On a donc finalement $y(t) = e^{2t} - t - 1$.

Correction 8. On considère un paramètre réel m . Résoudre l'équation différentielle suivante en discutant selon les valeurs de m : $y'' - (m + 1)y' + my = e^x - x - 1$.

- On reconnaît une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
- Résolution de l'équation homogène associée : $y'' - (m + 1)y' + my = 0$
L'équation caractéristique associée est : $r^2 - (m + 1)r + m = 0$ dont le discriminant est $\Delta = (m + 1)^2 - 4m = (m - 1)^2$. Il faut donc distinguer deux cas :
 - ★ Cas 1 : si $m \neq 1$. Alors on a $\Delta > 0$, donc l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes, qui sont $\frac{m + 1 - |m - 1|}{2}$ et $\frac{m + 1 + |m - 1|}{2}$, soit $r_1 = 1$ et $r_2 = m$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est : $y_h(x) = Ae^x + Be^{mx}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.
 - ★ Cas 2 : si $m = 1$. Alors on a $\Delta = 0$, donc l'équation caractéristique possède une solution réelle double, qui est $r_0 = 1$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est : $y_h(x) = (A + Bx)e^x$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.
- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre $y'' - (m + 1)y' + my = e^x$: on doit à nouveau faire deux cas, selon la valeur de m .
 - ★ Cas 1 : si $m \neq 1$. Le second membre est de la forme e^x avec 1 racine simple de l'équation caractéristique. On cherche alors y_1 sous la forme $y_1(x) = axe^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation, on obtient : $a = \frac{1}{1 - m}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y_1(x) = \frac{1}{1 - m}xe^x$.
 - ★ Cas 2 : si $m = 1$. Le second membre est de la forme e^x avec 1 racine double de l'équation caractéristique. On cherche alors y_1 sous la forme $y_1(x) = ax^2e^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation, on obtient : $a = \frac{1}{2}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y_1(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$.

- Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre $y'' - (m+1)y' + my = x + 1$. Il faut distinguer le cas où le coefficient du y vaut 0.
 - ★ Cas 1 : si $m \neq 0$. Le second membre est un polynôme de degré 1, on cherche alors y_2 sous la forme $y_2(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En remplaçant dans l'équation, on obtient : $a = \frac{1}{m}$ et $b = \frac{2m+1}{m^2}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y_2(x) = \frac{1}{m}x + \frac{2m+1}{m^2}$.
 - ★ Cas 2 : si $m = 0$. On doit alors résoudre $y'' - y' = x + 1$. On a une équation différentielle d'ordre 1 en y' . On cherche donc une solution particulière pour y' de la forme $y_2'(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En remplaçant dans l'équation, on obtient : $a = -1$ et $b = 2$. On a donc $y_2'(x) = -x + 2$, et on peut choisir comme solution particulière $y_2(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$.
- Conclusion : on utilise le principe de supersposition pour dire que la solution générale de l'équation s'écrit $y = y_h + y_1 + y_2$. Selon les cas, on obtient donc :

★ Cas 1 : si $m \notin \{0, 1\}$.
$$y(x) = Ae^x + Be^{mx} + \frac{1}{1-m}xe^x - \frac{1}{m}x - \frac{2m+1}{m^2}$$
 avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.

★ Cas 2 : si $m = 1$.
$$y(x) = (A + Bx)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x - x - 3$$
 avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.

★ Cas 3 : si $m = 0$.
$$y(x) = Ae^x + B + xe^x + \frac{x^2}{2} - 2x$$
 avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.

Correction 9. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'' - 4y' + 5y = e^x$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

- ★ On reconnaît une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
- ★ Résolution de l'équation homogène associée : $y'' - 4y' + 5y = 0$
L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 4r + 5 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -4 < 0$. L'équation caractéristique a donc deux solutions complexes conjuguées $r_1 = 2+i$ et $r_2 = 2-i$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est : $y_h(x) = e^{2x}(A \cos(x) + B \sin(x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.
- ★ Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre $y'' - 4y' + 5y = e^x$: Le second membre est de la forme e^{mx} avec $m = 1$ et $i \times 1$ non racine de l'équation caractéristique. On cherche alors y_1 sous la forme $y_1(x) = ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation, on obtient : $a = \frac{1}{2}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x$.
- ★ La solution générale de l'équation est alors : $y(x) = e^{2x}(A \cos(x) + B \sin(x)) + \frac{1}{2}e^x$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- ★ Conditions initiales. On a $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Or on sait que $y(0) = A + \frac{1}{2}$, et d'autre part, on a $y'(x) = e^{2x}(2A \cos(x) + 2B \sin(x) - A \sin(x) + B \cos(x)) + \frac{1}{2}e^x$. On en déduit que $y'(0) = 2A + B + \frac{1}{2}$. On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} A + \frac{1}{2} = 1 \\ 2A + B + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution vérifiant les conditions initiales données est

$$y(x) = \frac{e^{2x}}{2}(\cos(x) - 3 \sin(x)) + \frac{1}{2}e^x.$$

2. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

- ★ On reconnaît une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
- ★ Résolution de l'équation homogène associée : $y'' - 4y' + 5y = 0$. D'après les calculs précédents, la solution générale de l'équation homogène est : $y_h(x) = e^{2x}(A \cos(x) + B \sin(x))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.
- ★ Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$: Le second membre est de la forme e^{mx} avec $m = 2$ et $i \times 2$ non racine de l'équation caractéristique. On cherche alors y_1 sous la forme $y_1(x) = ae^{2x}$ avec $a \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation, on obtient : $a = 1$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y_p(x) = e^x$.
- ★ La solution générale de l'équation est alors : $y(x) = e^{2x}(A \cos(x) + B \sin(x) + 1)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
- ★ Conditions initiales. On a $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Or on sait que $y(0) = A + 1$, et d'autre part, on a $y'(x) = e^{2x}(2A \cos(x) + 2B \sin(x) + 2 - A \sin x + B \cos x)$. On en déduit que $y'(0) = 2A + 2 + B$. On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} A + 1 = 0 \\ 2A + B + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution vérifiant les conditions initiales données est

$$\boxed{y(x) = e^{2x}(-\cos(x) + \sin(x) + 1)}.$$

III Quelques équations issues de la physique chimie

III. 1 Équations d'ordre 1

Correction 10. Cinétique chimique

On considère la réaction chimique d'équation bilan : $2N_2O_5 \rightarrow 4NO_2 + O_2$. Cette réaction a une cinétique d'ordre 1, c'est-à-dire que la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, définie par $v = -\frac{1}{2} \frac{d[N_2O_5]}{dt}$ vérifie l'équation : $v = k[N_2O_5]$.

En posant $y(t) = [N_2O_5](t)$, et en notant $c_0 = y(0)$, donner l'expression exacte de la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, et tracer sa courbe.

On doit résoudre l'équation différentielle : $-\frac{1}{2}y' = ky$, c'est-à-dire $y' + 2ky = 0$. C'est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants et homogène. On connaît donc l'ensemble des solutions :

$$S = \{y : t \mapsto Ce^{-2kt}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}\}.$$

De plus, on a $y(0) = c_0$, donc $Ce^{-2k \times 0} = c_0$, soit $C = c_0$. On en déduit que y a pour expression

$$\boxed{y(t) = c_0 e^{-2kt}}.$$

Pour tracer la courbe, il suffit d'étudier les variations de la fonction y , en supposant que k et c_0 sont des constantes strictement positives.

On peut calculer la constante de temps caractéristique de la réaction en calculant le point d'intersection entre la tangente à l'origine et l'axe des abscisses. Ce temps est ici $t_c = \frac{1}{2k}$.

Correction 11. Loi de Fick

Une cellule est plongée dans une solution de potassium de concentration c_p . On note $c(t)$ la concentration de potassium dans la cellule à l'instant t , et on suppose que $c(0) = 0$.

D'après la loi de Fick, la vitesse de variation de la concentration de potassium dans la cellule est proportionnelle au gradient de concentration $c_p - c(t)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante τ homogène à un temps telle que

$$c'(t) = \frac{c_p - c(t)}{\tau}.$$

Déterminer $c(t)$ et tracer le graphe de c .

On doit résoudre l'équation différentielle : $c' + \frac{1}{\tau}c = \frac{1}{\tau}c_p$. C'est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants.

- On commence par étudier l'équation homogène associée : $c' + \frac{1}{\tau}c = 0$. L'ensemble des solutions est $S_h = \{c_h : t \mapsto Ce^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}\}$.
- On cherche une solution particulière constante : $f(t) = \alpha$. On a alors $f'(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + \frac{1}{\tau}\alpha = \frac{1}{\tau}c_p$, soit $\alpha = c_p$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \{c : t \mapsto Ce^{-\frac{t}{\tau}} + c_p, C \in \mathbb{R}\}$. Comme de plus on a $c(0) = 0$, on a $C + c_p = 0$, soit $C = -c_p$. Finalement, la solution est donnée par $c(t) = c_p \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

Pour tracer la courbe, il suffit d'étudier les variations de la fonction c , en supposant que τ et c_p sont des constantes strictement positives.

On constate que la concentration tend vers c_p : les concentrations en potassium s'équilibrent entre le milieu extérieur et la cellule.

Correction 12. Datation au carbone 14.

La vitesse de désintégration du carbone 14 est proportionnelle à sa quantité présente dans le matériau considéré. Ainsi, si on note $y(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans un échantillon de matière organique à l'année t , y vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) = -ky(t),$$

où $k = 1.238 \times 10^{-4} \text{an}^{-1}$ est la constante de désintégration du carbone 14.

1. Calculer l'expression explicite de $y(t)$ en fonction du nombre N_0 d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$.

On doit résoudre l'équation différentielle $y' + ky = 0$. C'est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants et homogène. On connaît donc l'ensemble des solutions :

$$S = \{y : t \mapsto Ce^{-kt}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}\}.$$

De plus, on a $y(0) = N_0$, donc $Ce^{-k \times 0} = N_0$, soit $C = N_0$. On en déduit que y a pour expression

$$y(t) = N_0 e^{-kt}.$$

2. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps au bout duquel la moitié de ses atomes se sont désintégrés. Déterminer la demi-vie du carbone 14.

On cherche $t_{0.5}$ tel que :

$$y(t_{0.5}) = \frac{1}{2}N_0 \Leftrightarrow N_0 e^{-kt_{0.5}} = \frac{1}{2}N_0 \Leftrightarrow e^{-kt_{0.5}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -kt_{0.5} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

par stricte croissance de la fonction logarithme. On en déduit $t_{0.5} = \frac{\ln 2}{k}$. L'application numérique donne $t_{0.5} \simeq 5599$ ans.

3. Lors de fouilles, on a découvert un fragment d'os dont la teneur en carbone 14 vaut 70% de celle d'un os actuel de même masse. Estimer l'âge de ces fragments.

On cherche t_1 tel que :

$$y(t_1) = 0.7N_0 \Leftrightarrow N_0 e^{-kt_1} = 0.7N_0 \Leftrightarrow e^{-kt_1} = 0.7 \Leftrightarrow -kt_1 = \ln(0.7)$$

par stricte croissance de la fonction logarithme. On en déduit $t_1 = -\frac{\ln 0.7}{k}$. L'application numérique donne comme estimation $t_1 \simeq 2881$ ans pour ces fragments.

III. 2 Équations d'ordre 2

Correction 13.

1. Circuit RC

On place en série un condensateur de capacité C et une résistance R , alimentés par un générateur de force électromotrice V . La charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors l'équation

$$q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{V}{R}.$$

Calculer l'expression explicite de q , sachant que la charge initiale est nulle, et tracer le graphe de q . On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants.

- On commence par étudier l'équation homogène associée : $q' + \frac{1}{RC}q = 0$. L'ensemble des solutions est : $S_h = \{q_h : t \mapsto K e^{-\frac{t}{RC}}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}\}$.
- On cherche une solution particulière constante : $q_p(t) = \alpha$. On a alors $q'_p(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + \frac{1}{RC}\alpha = \frac{V}{R}$, soit $\alpha = VC$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \{q : t \mapsto K e^{-\frac{t}{RC}} + VC, K \in \mathbb{R}\}$. Comme de plus on a $q(0) = 0$, on a $K + VC = 0$, soit $K = -VC$. Finalement, la solution est donnée par

$$q(t) = VC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

On constate que la charge tend vers VC . On peut trouver le temps caractéristique du circuit en calculant le point d'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote $y = VC$. Ce temps est ici $t_c = RC$.

2. Circuit LC

On place en série un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L , alimentés par un générateur de force électromotrice V . La charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors l'équation

$$q''(t) + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{V}{L}.$$

Calculer l'expression explicite de q , sachant que la charge initiale est nulle et que $q'(0) = 0$, et tracer le graphe de q .

On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

- On commence par étudier l'équation homogène associée : $q'' + \frac{1}{LC}q = 0$. On étudie l'équation caractéristique associée : $r^2 + \frac{1}{LC} = 0$. Ses solutions sont complexes conjuguées, données par $r_1 = i\omega$ et $r_2 = -i\omega$ avec $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. L'ensemble des solutions est $S_h = \{q_h : t \mapsto A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.
- On cherche une solution particulière constante : $q_p(t) = \alpha$. On a alors $q''_p(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + \frac{1}{LC}\alpha = \frac{V}{L}$, soit $\alpha = VC$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \{q : t \mapsto A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + VC, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$. On étudie à présent les conditions initiales. On a $q(0) = A + VC = 0$, soit $A = -VC$. De plus, on doit avoir $q'(0) = 0$. On calcule la dérivée de q : $q'(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$, donc $q'(0) = B = 0$. On a donc finalement : $q(t) = VC(1 - \cos(\omega t))$.

On constate que la charge oscille entre 0 et $2VC$. La période de charge est donnée par $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$.