

Interro 7

15 minutes

Exercice 1. Résoudre le système suivant

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + y - z = 0 \\ x - y - 3z = -2 \end{cases}$$

Correction 1. $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$(S) \iff \begin{cases} x & +y & +z & = 1 \\ -2y & -4z & & = -3 \\ -2y & -4z & & = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x & +y & +z & = 1 \\ & -2y & -4z & = -3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x & +y & = 1 & -z \\ & y & = \frac{3}{2} & -2z \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 1 - z - \frac{3}{2} + 2z = \frac{-1}{2} + z \\ & y & = \frac{3}{2} - 2z \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{-1}{2} + z, \frac{3}{2} - 2z, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 2. Résoudre

$$y' - \frac{3}{x}y = x(E) \quad \text{avec } y(1) = 2.$$

Correction 2. L'équation homogène associée est $(EH) : y' - \frac{3}{x}y = 0$ dont les solutions sont

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_H &= \{x \mapsto Ce^{3\ln(x)} \mid C \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \mapsto Cx^3 \mid C \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = C(x)x^3$ on obtient :

$$C'(x)x^3 = x.$$

Ainsi $C'(x) = \frac{1}{x^2}$, on peut choisir $C(x) = \frac{-1}{x}$. $y_p(x) = -x^2$ est donc une solution particulière de (E) .

Les solutions de (E) sont donc :

$$\mathcal{S}_E = \{x \mapsto -x^2 + Cx^3 \mid C \in \mathbb{R}\}$$

La condition initiale $y(1) = 2$ permet de déterminer la constante $C : -1^2 + C1^3 = 2$ On obtient $C = 3$. L'unique solution du problème est donc

$$y(x) = -x^2 + 3x^3$$

Exercice 3. Ecrire un script Python qui prend en argument un nombre réel positif x et renvoie le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ soit plus grand que x . Le programme retournera un message d'erreur si le nombre est négatif.

Correction 3.

```
1 def serie_harmonique(x):
2     if x < 0:
3         return('erreur , x doit etre positif ')
4     else :
5         n=1
6         s=1/n
7         while s < x:
8             n=n+1
9             s=s+1/n
10        return(n)
```