Programme de colle : Semaine 6
Lundi 8 Novembre

I Cours

I. 1 Suites Réelles

1. Principe de récurrence. Récurrence double. Récurrence forte (dans ce cas, il faut mentionner la nécessité de faire une récurrence forte)
2. Somme, produits.
3. Les étudiants doivent connaitre la valeur des sommes suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} 1, \sum_{k=0}^{n} k, \sum_{k=0}^{n} k^2, \sum_{k=0}^{n} k^3.$$
4. Sommes doubles.
5. Suites usuelles (arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, suite récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants)
6. Sommes téléscopiques vues en TD.
7. Théorémes de convergence sur les suites :
   — Suite croissante, majorée.
   — Suites adjacentes.
   — Théorèmes des gendarmes.
8. Croissance comparée (par rapport aux fonctions on ajoute $n!$ et n^n - peu vu)

II Systèmes linéaires

1. Résolution des systèmes linéaires avec la méthode du pivot de Gauss.
2. Notion de rang d'un système linéaire.

III Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Savoir définir une variable.
2. Savoir manipuler des conditions (`if, elif, else`)
3. Savoir écrire un script qui calcul une somme, ou les termes d'une suite (boucle `for`)
4. Savoir écrire un script avec une boucle `while`
5. La syntaxe des fonctions a été vue et doit être sue.

IV Exercices Types

1. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de $u_n = \frac{n!^2}{n^{2n}}$
2. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n} e^{\frac{ik\pi}{n}}$$

3. Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de $u_n = \dfrac{1}{n^4}\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} k^3}$

4. Calculer
$$\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=1}^{\ell^2}\frac{i}{\ell^2}$$

5. Exprimer le terme général en fonction de n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \end{cases}$$
(On pourra regarder $v_n = \ln(u_n)$)

6. Calculer
$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{a=0}^{n} a^k$$

7. $$\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ 3x + 5y + 2z &= 2 \end{cases}$$

8. Résoudre en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, le système
$$\begin{cases} x + 2y &= 1 \\ \lambda x + y &= 0 \end{cases}$$

9. Résoudre en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, le système
$$\begin{cases} \lambda x + y &= 1 \\ \lambda x + (1-\lambda)y &= 0 \end{cases}$$

10. Sans utiliser la fonction floor de Python, ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel x et retourne sa partie entière.

11. Ecrire un script Python qui permet calculer
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{j}}{k}$$

12. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n qui simule n lancers de dé à 6 faces et retourne la somme des valeurs des lancers.