Interro 8

15 minutes

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, 2\pi[$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$$

Correction 1. $\cos(\frac{2\pi}{3}) = \frac{-1}{2}$ Sur $\mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} 2x + \frac{\pi}{3} &\in \cup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\} \\ 2x &\in \cup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\pi + 2k\pi\} \\ x &\in \cup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{6} + k\pi, -\pi + k\pi\} \end{aligned}$$

les solutions sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\boxed{\mathbb{S} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{-\pi}{2} + k\pi\}}$$

Les solutions sur $[0, 2\pi[$ sont donc :

$$\boxed{\mathbb{S} \cap [0, 2\pi[= \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}}$$

Exercice 2. A l'aide du changement de variable $u = e^x$ calculer

$$\int_0^1 e^{2x}\cos(e^x)dx$$

Correction 2. $I = \int_0^1 e^{2x}\cos(e^x)dx$ On a $du = e^x dx$ d'où $\frac{1}{u}du = dx$.
$e^{2x} = u^2$ et $\cos(e^x) = \cos(u)$
Enfin pour les bornes : $x = 0 \iff u = 1$ et $x = 1 \iff u = e$. Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e u^2\cos(u)\frac{1}{u}du \\ &= \int_1^e u\cos(u)du \end{aligned}$$

On fait une intégration par partie : on pose $f(u) = u$, $f'(u) = 1$ et $g(u) = \sin(u)$, d'où $g'(u) = \cos(u)$
Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= [u\sin(u)]_1^e - \int_1^e \sin(u)du \\ &= \sin(1) - e\sin(e) + [+\cos(u)]_1^e \\ &= \sin(1) - e\sin(e) + \cos(e) - \cos(1) \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \sin(1) - e\sin(e) + \cos(e) - \cos(1)}$$

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, 2\pi[$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{2} \quad (E)$$

Correction 3. $\arcsin(\frac{-1}{2})=\frac{-\pi}{6}$ Donc x est solution de l'équation (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} 2x+\frac{\pi}{4} &\in \cup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{-\pi}{6}+2k\pi, \pi-\frac{-\pi}{6}+2k\pi\} \\ 2x &\in \cup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{-\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{-\pi}{4}+\pi-\frac{-\pi}{6}+2k\pi\} \\ x &\in \cup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{-5\pi}{24}+k\pi, \frac{11\pi}{24}+k\pi\} \end{aligned}$$

Les solutions sur $[0,2\pi[$ sont donc :

$$\boxed{\left\{\frac{-5\pi}{24}+\pi, \frac{-5\pi}{24}+2\pi, \frac{11\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}+\pi\right\}}$$

Exercice 4. A l'aide du changement de variable $u=e^x$ calculer

$$\int_0^1 e^{2x}\sin(e^x)dx$$

Correction 4. $I=\int_0^1 e^{2x}\sin(e^x)dx$ On a $du=e^x dx$ d'où $\frac{1}{u}du=dx$.
$e^{2x}=u^2$ et $\sin(e^x)=\sin(u)$
Enfin pour les bornes : $x=0 \iff u=1$ et $x=1 \iff u=e$. Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e u^2\sin(u)\frac{1}{u}du \\ &= \int_1^e u\sin(u)du \end{aligned}$$

On fait une intégration par partie : on pose $f(u)=u$, $f'(u)=1$ et $g(u)=-\cos(u)$, d'où $g'(u)=\sin(u)$
Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= [-u\cos(u)]_1^e+\int_1^e \cos(u)du \\ &= -\cos(1)+e\cos(e)+[-\sin(u)]_1^e \\ &= -\cos(1)+e\cos(e)-\sin(e)+\sin(1) \end{aligned}$$