DM 10

Exercice 1. Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{x+4}{x+2} \leq \frac{3}{x} \quad (E_1)$$

En déduire les solutions de

$$\frac{x^2+4}{x^2+2} \leq \frac{3}{x^2} \quad (E_2)$$

et de

$$\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{3}{\sqrt{x}} \quad (E_3)$$

Exercice 2. Un jeu de cartes non truqué comporte 52 cartes. Une main est constituée de 8 cartes. (une 'couleur' correspond au choix de pique, coeur, carreau ou trefle, et non pas rouge ou noir)

1. Quel est le nombre de mains possibles sans contraintes.
2. Quel est le nombre de mains possibles avec exactement deux dames.
3. Quel est le nombre de mains possibles comportant des cartes d'exactement 2 couleurs ?
4. Quel est le nombre de mains possibles comportant deux couleurs au plus ?

Correction 1. **Exercice 6 : Jeu de cartes :**

1. C'est un choix de 8 éléments parmi 52 sans ordre et sans répétition. C'est donc

$$\boxed{\binom{52}{8}}$$

2. Il faut choisir deux dames parmi les 4 ce qui donne $\binom{4}{2}$. Puis les 6 autres sont obtenus dnas les 52-48 cartes restantes : $\binom{48}{6}$.

$$\boxed{\binom{4}{2}\binom{48}{6}}$$

3. On commence par faire le choix de la couleur, on a donc 2 choix parmi 4 sans ordre et sans répétition : $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$. Une fois le choix de la couleur fait, il faut prendre nos 8 cartes parmi les cartes de ces deux couleurs à savoir on doit prendre 8 cartes parmi les 26 cartes des deux couleurs choisies. On a compté en trop le cas où nos 8 cartes étaient en fait toutes prises de la même couleur. Il faut donc retirer à $\begin{pmatrix}26\\8\end{pmatrix}$ le nombre de possibilités que l'on a d'avoir pris en fait 8 cartes de la même couleur, à savoir : $2 \times \begin{pmatrix}13\\8\end{pmatrix}$. On le compte 2 fois car il y a deux couleurs. Finalement, on obtient : $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}26\\8\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}13\\8\end{pmatrix}\right]$.
4. On veut choisir au plus deux couleurs, c'est-à-dire exactement une ou bien exactement deux. On a calculé le nombre de tirages avec exactement deux couleurs à la question précédente. De plus, pour choisir des cartes d'une seule couleur, on a 4 choix pour la couleur, puis $\begin{pmatrix}13\\8\end{pmatrix}$ possibilités pour les tirages. Comme les tirages d'une couleur et de deux couleurs sont disjoints, le cardinal de l'union des deux ensembles est la somme des cardinaux, et on en déduit que l'on a

$$\boxed{\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}26\\8\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}13\\8\end{pmatrix}\right] + 4\begin{pmatrix}13\\8\end{pmatrix} \text{ possibilités.}}$$

Mais on aurait aussi pu dire, il y a 2 choix parmi 4 sans ordre et sans répétition : $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ pour les couleurs. Une fois le choix de la couleur fait, il faut prendre nos 8 cartes parmi les cartes de ces deux couleurs à savoir on doit prendre 8 cartes parmi les 26 cartes des deux couleurs choisies. et on obtient

$$\boxed{\binom{4}{2}\binom{26}{8}}$$

Exercice 3. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire successivement et avec remise 5 boules.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages possibles tel qu'au moins un nombre soit plus grand strictement que 3
3. Déterminer le nombre de tirages possibles dont la somme des nombres est paire (On pourra montrer qu'il y a autant de tirages dont la somme des nombres est impaire)

Correction 2.

1. Les choix se font avec ordre ("successivement") et avec répétition ("avec remise"). Il y a donc
$$\boxed{10^5 \text{ possibilités}}$$
2. On va regarder l'événement contraire : le nombre de tirages tel que tous les numéros tirés soient plus petit (ou égal) à 3. On obtient 3^5 tirages. Ainsi le nombre de tirages possibles tel qu'au moins un nombre soit plus grand strictement que 3 est
$$\boxed{10^5 - 3^5}$$
3. Un tirage correspond à un 5-uplet de $[\![1, 10]\!]$ c'est à dire un élément de $[\![1, 10]\!]^5$.
Soit P le sous ensemble de $[\![1, 10]\!]^5$ correspondant aux tirages dont la somme est paire et I le sous ensemble de $[\![1, 10]\!]^5$ correspondant aux tirages dont la somme est impaire. On a d'une part $P \cup I = [\![1, 10]\!]^5$, et d'autre $P \cap I = \emptyset$ Donc
$$\operatorname{Card} P + \operatorname{Card} I = 10^5$$
Par ailleurs, considèrons l'application :
$$F : \left| \begin{array}{lcl} [\![1, 10]\!]^5 & \to & [\![1, 10]\!]^5 \\ (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) & \mapsto & (11 - b_1, 11 - b_2, 11 - b_3, 11 - b_4, 11 - b_5) \end{array} \right.$$
L'application F est bijective (le prouver...) et $F(P) = I$. Comme F est une bijection
$$\operatorname{Card}(P) = \operatorname{Card}(I)$$
Finalement on obtient $2Card(P) = 10^5$ soit
$$\boxed{\operatorname{Card}(P) = \tfrac{1}{2}10^5}$$