

TD 11 : Géométrie

I Produit scalaire

Exercice 1. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

1. Démontrer que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.
2. Dédire de la question précédente, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parallélogramme $ABCD$ soit rectangle.

Exercice 2. Soit ABC un triangle non plat du plan.

1. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
2. Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C .
Montrer que $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et en déduire que H appartient à la hauteur issue de A .

Exercice 3. Formule d'Al Kachi.

On considère un triangle ABC . On note \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} les mesures respectives des angles non orientés \widehat{BAC} , \widehat{ABC} et \widehat{ACB} et l'on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. Démontrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$ et énoncer deux autres formules similaires.
Qu'obtient-on si $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$?
2. Si $a = 4$, $b = 3$ et $c = 2$, calculer une valeur approchée (à 10^{-2} degré près) de \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} .
3. Si $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$, $a = 3$ et $c = 2$, calculer b .

II Géométrie et nombres complexes

Exercice 4. Déterminer géométriquement les complexes z vérifiant les relations suivantes. Vérifier votre résultat par un calcul.

1. $|z - 1 - i| = |z + 1 + i|$
2. $(|z - i| - 1)(|z + 1| - 2) = 0$
3. $\frac{z - 1}{z - i} \in \mathbb{R}_+^*$

III Géométrie du plan

Exercice 5. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D} : 2x + 5y - 10 = 0$ et de la droite \mathcal{D}' passant par $A(-1, 2)$ et dirigée par $\vec{u}(3, 2)$.

Exercice 6. Déterminer l'équation de la droite D passant par $A = (2, 1)$ et $B = (1, -2)$. Donner un vecteur directeur de D et une équation paramétrique de D .

Exercice 7. 1. Déterminer les éventuels points d'intersection de la droite $\mathcal{D} : x + 3y - 4 = 0$ et du cercle $\mathcal{C}_k : x^2 + y^2 - 6y + k = 0$ pour $k = 4$, $k = \frac{13}{2}$ et $k = 8$.

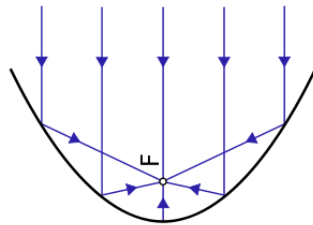
- Déterminer les éventuels points d'intersection des cercles $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$ et $\mathcal{C}' : x^2 + y^2 + x - 3y = 0$.
- On considère l'ensemble $\mathcal{C}'_k : x^2 + y^2 - 4x + 2y + k = 0$.
Déterminer sa forme géométrique en fonction de la valeur de k .

- Exercice 8.**
- Déterminer l'équation du cercle \mathcal{C}_1 de diamètre $[AB]$ où $A(3, 1)$ et $B(7, -1)$.
 - La partie \mathcal{C}_2 du plan définie par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0$ est-elle un cercle?
Si oui, donner son centre et son rayon.
 - Déterminer l'intersection de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Exercice 9. Soit A et B de coordonnées : $A = (1, 2)$ et $B = (2, 3)$. Soit \mathcal{C} le cercle de centre $\Omega = (2, 0)$ et de rayon 1. Pour tout point M du cercle on considère le triangle ABM .
Quel est le point du cercle qui minimise l'aire de ce triangle ?

- Exercice 10.** Soit A, B et C trois points du plan de coordonnées respectives $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ et $C = (2, 2)$.
- Donner l'équation des trois médianes et montrer qu'elles s'intersectent en un seul point.
 - Faire de même avec les médiatrices.
On appelle O l'intersection des trois médiatrices
 - Donner l'équation du cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon OA .
 - Montrer que B et C appartiennent à \mathcal{C} .

Exercice 11. On considère un miroir parabolique. Montrer que tous les rayons venant de l'infini se réfléchissant sur le miroir s'intersectent en un même point.



IV Géométrie de l'espace

- Exercice 12.**
- Déterminer l'équation du plan P qui passe par les points A, B, C de coordonnées respectives : $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 2, 3)$ et $C = (-1, 0, -2)$.
 - Donner deux vecteurs non colinéaires et parallèles à P
 - Soit D de coordonnées $(1, 2, 3)$. Est ce que D appartient à P ?
 - Donner H le projeté orthogonal de D sur H .

Exercice 13. On considère les plans $\mathcal{P} : x - y + z = 1$ et $\mathcal{P}' : x + 2y + 3z = 6$.
Justifier que $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite, que l'on appellera \mathcal{D} . Déterminer un vecteur directeur de \mathcal{D} .

Exercice 14. Déterminer la droite \mathcal{D} contenant le point $A = (2, 1, 3)$ parallèle au plan d'équation $x + y + z = 2$ et rencontrant la droite \mathcal{D}' d'équations cartésiennes $x = 1$ et $y = z$.