

Correction TD 11 : Géométrie

I Produit scalaire

Correction 1. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

1. Démontrer que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

On calcule :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Donc :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Comme $\|\vec{u} + \vec{v}\| \in \mathbb{R}_+$, $\|\vec{u} - \vec{v}\| \in \mathbb{R}_+$ et $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , on résout :

$$\begin{aligned} (\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|) &\iff (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \iff (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 0) \iff (4\vec{u} \cdot \vec{v} = 0) \\ &\iff (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0) \iff (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux si et seulement si } \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| .}$$

2. Dédurre de la question précédente, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parallélogramme $ABCD$ soit rectangle.

Faites un dessin pour voir de quoi vous parlez !

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On résout :

$$\begin{aligned} (ABCD \text{ est un rectangle}) &\iff (\vec{AB} \text{ et } \vec{AD} \text{ sont orthogonaux}) \iff (\|\vec{AB} + \vec{AD}\| = \|\vec{AB} - \vec{AD}\|) \\ &\iff (\|\vec{AB} + \vec{BC}\| = \|\vec{AB} + \vec{DA}\|) \iff (\|\vec{AC}\| = \|\vec{DB}\|) \iff (AC = DB) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{ABCD \text{ est un rectangle, si et seulement si ses diagonales sont de même longueur.}}$$

Correction 2. Soit ABC un triangle non plat du plan.

1. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a $\vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} = 0$.

Soit M un point du plan. On calcule :

$$\begin{aligned} \vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} &= \vec{MA} \cdot \vec{BC} + (\vec{MA} + \vec{AB}) \cdot \vec{CA} + (\vec{MA} + \vec{AC}) \cdot \vec{AB} \\ &= \vec{MA} \cdot (\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}) + \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AC} \cdot \vec{AB} \\ &= \vec{MA} \cdot (\vec{BB}) + (\vec{CA} + \vec{AC}) \cdot \vec{AB} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C .

Montrer que $\vec{HA} \cdot \vec{BC} = 0$ et en déduire que H appartient à la hauteur issue de A .

Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C .

• H appartient à la hauteur issue de B donc les droites (HB) et (CA) sont perpendiculaires, donc :

$$\vec{HB} \cdot \vec{CA} = 0$$

- H appartient à la hauteur issue de C donc les droites (HC) et (AB) sont perpendiculaires, donc :

$$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

On en déduit, en appliquant $\mathbf{1}$: $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, donc $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + 0 + 0 = 0$, donc $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, donc les droites (HA) et (BC) sont perpendiculaires, donc H appartient à la hauteur issue de A .

Correction 3. Formule d'Al Kachi.

On considère un triangle ABC . On note \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} les mesures respectives des angles non orientés \widehat{BAC} , \widehat{ABC} et \widehat{ACB} et l'on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. Démontrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$ et énoncer deux autres formules similaires. Qu'obtient-on si $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$?

On calcule :

$$a^2 = BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

De même : $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos(\hat{B})$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C})$.

Si $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, donc si le triangle ABC est rectangle en A , on obtient $\cos(\hat{A}) = 0$, donc :

$a^2 = b^2 + c^2$: c'est le théorème de Pythagore.

2. Si $a = 4$, $b = 3$ et $c = 2$, calculer une valeur approchée (à 10^{-2} degré près) de \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} .

$$\cos(\hat{A}) = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = -\frac{1}{4}, \text{ et } \hat{A} \in [0; \pi] \text{ (angle non orienté), donc } \hat{A} = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 104,48^\circ.$$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{11}{16}, \text{ et } \hat{B} \in [0; \pi] \text{ (angle non orienté), donc } \hat{B} = \arccos\left(\frac{11}{16}\right) \approx 46,57^\circ.$$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{-c^2 + a^2 + b^2}{2ab} = \frac{21}{24}, \text{ et } \hat{C} \in [0; \pi] \text{ (angle non orienté), donc } \hat{C} = \arccos\left(\frac{21}{24}\right) \approx 28,96^\circ.$$

Remarque : on peut vérifier que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \approx 180^\circ$ (à $0,01^\circ$ près).

3. Si $\hat{A} = \frac{\pi}{6}$, $a = 3$ et $c = 2$, calculer b .

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos(\hat{A}), \text{ donc } b^2 - 2bc \cos(\hat{A}) + c^2 - a^2 = 0, \text{ donc } b^2 - 2\sqrt{3}b - 5 = 0.$$

Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 32 = (4\sqrt{2})^2$, donc :

$$b = \frac{2\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \text{ ou } b = \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}.$$

Or $b \geq 0$ (c'est une longueur), donc

$$\boxed{b = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$$

II Géométrie et nombres complexes

Exercice 1. Déterminer géométriquement les complexes z vérifiant les relations suivantes. Vérifier votre résultat par un calcul.

1. $|z - 1 - i| = |z + 1 + i|$:

Soit A , B et M les points d'affixes $1 + i$, $-1 - i$ et z . On a :

$$|z - 1 - i| = |z + 1 + i| \Leftrightarrow AM = BM,$$

donc l'ensemble des points cherchés est

$$\boxed{\text{la médiatrice du segment } [AB].}$$

On retrouve ce résultat par le calcul. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 |z - 1 - i| = |z + 1 + i| &\Leftrightarrow |x + iy - 1 - i| = |x + iy + 1 + i| \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \\
 &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 && \text{car les termes sont positifs} \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 \\
 &\Leftrightarrow y = -x
 \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble solution est

$$\boxed{\text{la droite d'équation } y = -x}$$

2. $(|z - i| - 1)(|z + 1| - 2) = 0$:

Soit A, B et M les points d'affixes $i, -1$ et z . On a :

$$\begin{aligned}
 (|z - i| - 1)(|z + 1| - 2) = 0 &\Leftrightarrow |z - i| - 1 = 0 \text{ ou } |z + 1| - 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow AM = 1 \text{ ou } BM = 2
 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des points cherchés est

$$\boxed{\text{la réunion des cercles } \mathcal{C}(A, 1) \text{ et } \mathcal{C}(B, 2).$$

On retrouve ce résultat par le calcul. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 |z - i| - 1 = 0 \text{ ou } |z + 1| - 2 = 0 &\Leftrightarrow |x + iy - i| = 1 \text{ ou } |x + iy + 1| = 2 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 1 \text{ ou } \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ ou } (x+1)^2 + y^2 = 4 && \text{car les termes sont positifs}
 \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble solution est bien la réunion des deux cercles trouvés précédemment.

3. $\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}_+^*$: Soit A, B et M les points d'affixes $i, 1$ et z . On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}_+^* &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \frac{z-1}{z-i} = \lambda \\
 \frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}_+^* &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \frac{z-1}{z-i} = \lambda \\
 &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, z-1 = \lambda(z-i) \\
 &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{BM}
 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des points cherchés est l'ensemble des points de la droite (AB) pour lesquels les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BM} sont colinéaires de même sens (car $\lambda > 0$). On obtient

$$\boxed{\text{la réunion de deux demi-droites.}}$$

On retrouve ce résultat par le calcul. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$z - 1 = \lambda(z - i) \Leftrightarrow x + iy - 1 = \lambda(x + iy - i)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \lambda x \\ y = \lambda(y - 1) \end{cases}$$

par identification des parties réelles et imaginaires

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x-1}{x} & \text{car } x = 0 \text{ n'est pas solution} \\ y = \frac{x-1}{x}(y-1) \end{cases}$$

La dernière équation donne : $xy = (x-1)(y-1) \Leftrightarrow xy = xy - x - y + 1 \Leftrightarrow y = -x + 1$. De plus, on a : $\lambda > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Ainsi l'ensemble solution est bien la réunion des deux demi-droites trouvées précédemment.

III Géométrie du plan

Correction 4. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D} : 2x + 5y - 10 = 0$ et de la droite \mathcal{D}' passant par $A(-1, 2)$ et dirigée par $\vec{u}(3, 2)$.

\mathcal{D}' a pour équation paramétrique :
$$\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

Soit $M(x, y)$ un point du plan. On résout :

$$\begin{aligned} (M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}') &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ 2x + 5y - 10 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ -2 + 6\lambda + 10 + 10\lambda - 10 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ \lambda = 1/8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5/8 \\ y = 9/4 \end{cases} \Leftrightarrow M\left(-\frac{5}{8}; \frac{9}{4}\right) \end{aligned}$$

Conclusion :

Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' se coupent en un unique point $M_0\left(-\frac{5}{8}; \frac{9}{4}\right)$.

Correction 5.

1. Déterminer les éventuels points d'intersection de la droite $\mathcal{D} : x + 3y - 4 = 0$ et du cercle $\mathcal{C}_k : x^2 + y^2 - 6y + k = 0$ pour $k = 4$, $k = \frac{13}{2}$ et $k = 8$.

Commencez par tracer la droite \mathcal{D} et les trois cercles, pour voir ce qu'il se passe.

$$(M(x, y) \in \mathcal{C}_k) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + k = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y^2 - 2 \times 3y + 3^2) - 3^2 + k = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 9 - k \Leftrightarrow \Omega M^2 = 9 - k, \text{ en posant } \Omega(0, 3).$$

Donc :

- pour tout $k < 9$, $(M(x, y) \in \mathcal{C}_k) \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{9 - k}$. \mathcal{C}_k est le cercle de centre $\Omega(0, 3)$ et de rayon $\sqrt{9 - k}$;
- pour $k = 9$, $(M(x, y) \in \mathcal{C}_k) \Leftrightarrow \Omega M = 0 \Leftrightarrow M = \Omega$. \mathcal{C}_k est réduit au point $\Omega(0, 3)$;
- pour tout $k > 9$, l'équation n'a pas de solution et \mathcal{C}_k est vide.

Soit $M(x, y)$ un point du plan. On résout :

$$(M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_k) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6y + k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 4 \\ (-3y + 4)^2 + y^2 - 6y + k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 4 \\ 10y^2 - 30y + 16 + k = 0 \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation du second degré vaut $\Delta = 900 - 40(16 + k) = 260 - 40k$.

(a) Premier cas : $k = 4$. Alors $\Delta = 100$, donc $\Delta > 0$ et :

$$(M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_k) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 4 \\ y = \frac{30-10}{20} \text{ ou } y = \frac{30+10}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Donc \mathcal{D} et \mathcal{C}_k ont exactement deux points d'intersection : $M_1(1, 1)$ et $M_2(-2, 2)$.

(b) Second cas : $k = \frac{13}{2}$. Alors $\Delta = 0$ et :

$$(M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_k) \iff \begin{cases} x = -3y + 4 \\ y = \frac{30}{20} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Donc \mathcal{D} et \mathcal{C}_k ont exactement un point d'intersection : $M_0 \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$.

La droite \mathcal{D} est tangente au cercle \mathcal{C}_k au point M_0 . Donc en ce point elle est perpendiculaire au rayon.

(c) Troisième cas : $k = 8$. Alors $\Delta = -60$, donc $\Delta < 0$ et l'équation de degré 2 n'admet aucune solution réelle.

Donc \mathcal{D} et \mathcal{C}_k n'ont aucun point d'intersection.

Remarque : Pour toutes les valeurs de k strictement inférieures à $\frac{13}{2}$, on a $\Delta > 0$ et \mathcal{D} et \mathcal{C}_k ont exactement deux points d'intersection.

Pour toutes les valeurs de k strictement supérieures à $\frac{13}{2}$, on a $\Delta < 0$ et \mathcal{D} et \mathcal{C}_k n'ont aucun point d'intersection.

2. **Déterminer les éventuels points d'intersection des cercles $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$ et $\mathcal{C}' : x^2 + y^2 + x - 3y = 0$.**

Commencez par tracer les cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' , pour voir ce qu'il se passe.

• $(M(x, y) \in \mathcal{C}) \iff x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0 \iff x^2 + (y-3)^2 = 5 \iff \Omega M^2 = 5 \iff \Omega M = \sqrt{5}$, en posant $\Omega(0, 3)$.

Donc \mathcal{C} est le cercle de centre $\Omega(0, 3)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

• $(M(x, y) \in \mathcal{C}') \iff x^2 + y^2 + x - 3y = 0 \iff (x^2 + x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} + (y^2 - 3y + \frac{9}{4}) - \frac{9}{4} = 0$
 $\iff (x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{2} \iff \Omega' M^2 = \frac{5}{2} \iff \Omega' M = \sqrt{\frac{5}{2}}$, en posant $\Omega'(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Donc \mathcal{C}' est le cercle de centre $\Omega'(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ et de rayon $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan. On résout :

$$(M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}') \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + x - 3y = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0 \\ x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \iff (M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_4)$$

Donc d'après 1 : \mathcal{C} et \mathcal{C}' ont exactement deux points d'intersection : $M_1(1, 1)$ et $M_2(-2, 2)$.

3. **On considère l'ensemble $\mathcal{C}'_k : x^2 + y^2 - 4x + 2y + k = 0$.**

Déterminer sa forme géométrique en fonction de la valeur de k .

Soit $M(x, y)$ un point du plan. On résout :

$$(M \in \mathcal{C}'_k) \iff x^2 + y^2 - 4x + 2y + k = 0 \iff (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1 + k = 0 \iff (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$$

En posant $\Omega(2, -1)$, on obtient :

$$(M \in \mathcal{C}'_k) \iff \Omega M^2 = 5 - k$$

Donc :

- pour tout $k < 5$, $(M \in \mathcal{C}'_k) \iff \Omega M = \sqrt{5 - k}$. \mathcal{C}'_k est le cercle de centre $\Omega(2, -1)$ et de rayon $\sqrt{5 - k}$;
- pour $k = 5$, $(M \in \mathcal{C}'_k) \iff \Omega M = 0 \iff M = \Omega$. \mathcal{C}'_k est réduit au point $\Omega(2, -1)$;
- pour tout $k > 5$, l'équation n'a pas de solution et \mathcal{C}'_k est vide.

Correction 6.

1. **Déterminer l'équation du cercle \mathcal{C}_1 de diamètre $[AB]$ où $A(3, 1)$ et $B(7, -1)$.**

Le cercle \mathcal{C}_1 de diamètre $[AB]$ aura pour centre le milieu du segment $[AB]$, i.e. le point $\Omega(5, 0)$,

et pour rayon $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + (-2)^2}}{2} = \sqrt{5}$.

Il aura donc pour équation : (point de repère : $\Omega M^2 = 5$)

$$\boxed{(x - 5)^2 + y^2 = 5}$$

2. La partie \mathcal{C}_2 du plan définie par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0$ est-elle un cercle ? Si oui, donner son centre et son rayon.

Soit $M(x, y)$ un point du plan. On résout :

$$(M \in \mathcal{C}_2) \iff x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0 \iff (x^2 - 8x + 16) - 16 + \left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 10 = 0$$

Donc, en posant $\Omega(4, -\frac{1}{2})$, on a :

$$(M \in \mathcal{C}_2) \iff (x - 4)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \iff \Omega M^2 = \frac{25}{4} \iff \Omega M = \frac{5}{2}$$

Donc \mathcal{C}_2 est le cercle de centre $\Omega(4, -\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{5}{2}$.

3. Déterminer l'intersection de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Commencez par tracer \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 dans le plan pour voir de quoi il s'agit.

Soit $M(x, y)$ un point du plan. On résout :

$$\begin{aligned} (M \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) &\iff \begin{cases} (x - 5)^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0 \end{cases} \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0 \\ 2x + y - 10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + (-2x + 10)^2 - 10x + 20 = 0 \\ y = -2x + 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x^2 - 50x + 120 = 0 \\ y = -2x + 10 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 - 10x + 24 = 0 \\ y = -2x + 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{10 - \sqrt{4}}{2} \text{ ou } x = \frac{10 + \sqrt{4}}{2} \\ y = -2x + 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ont deux points d'intersection : $M_1(4, 2)$ et $M_2(6, -2)$.

IV Géométrie de l'espace

Correction 7. On considère les plans $\mathcal{P} : x - y + z = 1$ et $\mathcal{P}' : x + 2y + 3z = 6$.

Justifier que $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite, que l'on appellera \mathcal{D} . Déterminer un vecteur directeur de \mathcal{D} .

Le plan \mathcal{P} admet $\vec{n}(1, -1, 1)$ comme vecteur normal. Le plan \mathcal{P}' admet $\vec{n}'(1, 2, 3)$ comme vecteur normal. \vec{n} et \vec{n}' ne sont pas colinéaires, donc \mathcal{P} et \mathcal{P}' ne sont pas parallèles. Donc leur intersection est une droite \mathcal{D} .

Pour trouver un vecteur directeur, on cherche une équation paramétrique de \mathcal{D} (sachant qu'on en a une équation cartésienne).

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. On résout :

$$(M \in \mathcal{D}) \iff \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y + 2z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}z \\ y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}z \\ z = z \end{cases}$$

$$\text{On obtient donc une équation paramétrique de } \mathcal{D} : \begin{cases} x = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}\lambda \\ y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3}\lambda \\ y - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}\lambda \\ z - 0 = \lambda \end{cases} \iff$$

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u},$$

en posant $A\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$ et $\vec{u}\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$.

Donc

$$\mathcal{D} \text{ passe par le point } A \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, 0 \right) \text{ et est dirigée par le vecteur } \vec{u} \left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1 \right).$$

Correction 8. Déterminer la droite \mathcal{D} contenant le point $A = (2, 1, 3)$ parallèle au plan d'équation $x + y + z = 2$ et rencontrant la droite \mathcal{D}' d'équations cartésiennes $x = 1$ et $y = z$.
Rassemblons les informations que l'on a :

• \mathcal{D} passe par le point $A = (2, 1, 3)$; il ne manque qu'un vecteur directeur de \mathcal{D} pour avoir déterminé cette droite.

Appelons $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur directeur de \mathcal{D} ($\vec{u} \neq \vec{0}$; on va le déterminer à un facteur près).

On aura pour équation paramétrique de \mathcal{D} :

$$\begin{cases} x = 2 + a\lambda \\ y = 1 + b\lambda \\ z = 3 + c\lambda \end{cases} ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

• \mathcal{D} est parallèle au plan d'équation $x + y + z = 2$; donc le vecteur $\vec{n}(1, 1, 1)$, qui est normal à ce plan, sera normal à \mathcal{D} .

Donc $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$. Donc $a + b + c = 0$, donc

$$a = -b - c$$

. D'où l'équation paramétrique de \mathcal{D} :

$$\begin{cases} x = 2 + (-b - c)\lambda \\ y = 1 + b\lambda \\ z = 3 + c\lambda \end{cases} ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

• \mathcal{D} rencontre la droite \mathcal{D}' d'équations cartésiennes $x = 1$ et $y = z$.

Donc le système suivant, d'inconnue λ , admet au moins une solution.

$$(S) : \begin{cases} 2 + (-b - c)\lambda = 1 \\ 1 + b\lambda = 3 + c\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} (b + c)\lambda = 1 \\ (b - c)\lambda = 2 \end{cases}$$

On doit donc avoir

$$b + c \neq 0$$

(sinon la première équation n'a pas de solution), et on obtient :

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{b+c} \\ \frac{b-c}{b+c} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{b+c} \\ b - c = 2b + 2c \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{b+c} \\ b = -3c \end{cases}$$

Rassemblons les informations sur les coordonnées du vecteur $u(a, b, c)$:

$$\begin{cases} a = -b - c \\ b + c \neq 0 \\ b = -3c \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2c \\ b = -3c \\ c \neq 0 \end{cases}$$

On a un paramètre libre : c'est normal, une infinité de vecteurs conviennent ; on peut par exemple poser $c = 1$, et l'on obtient $a = 2$ et $b = -3$.

Donc

$$\vec{u}(2, -3, 1)$$

$$\mathcal{D} \text{ est la droite passant par } A = (2, 1, 3) \text{ et dirigée par } \vec{u}(2, -3, 1)$$

. Elle a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Correction 9. Déterminer l'équation de la sphère \mathcal{S} dans chacun des cas suivants :

1. \mathcal{S} est de centre $\Omega(-1, 2, 4)$ et passe par $A(1, 2, -1)$.

Il suffit de trouver le rayon de la sphère, et pour cela de calculer la distance ΩA . On a $\Omega A = \sqrt{(1+1)^2 + (2-2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{29}$.

On applique ensuite la formule du cours et on obtient :

$$\boxed{\mathcal{S} : (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 29}$$

2. \mathcal{S} est de diamètre $[AB]$ où $A(1, 2, 5)$ et $B(3, -4, 1)$.

On commence par calculer le rayon. On a $AB = \sqrt{(3-1)^2 + (-4-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$. Donc le rayon de la sphère est $\frac{AB}{2} = \sqrt{14}$. Il reste à trouver les coordonnées du centre. Pour

cela on cherche le milieu de AB , qui a pour coordonnées $\Omega = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2-4}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (2, -1, 3)$.

On applique ensuite la formule du cours et on obtient :

$$\boxed{\mathcal{S} : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 14}$$

3. \mathcal{S} est de centre $\Omega(3, -4, 2)$ et est tangente au plan d'équation $2x - 6y + 3z - 8 = 0$.

Notons $A(x, y, z)$ l'unique point d'intersection entre la sphère et le plan. On sait que $\vec{\Omega A}$ est un vecteur normal au plan. Or, tous les vecteurs normaux au plan sont colinéaires au vecteur $(2, -6, 3)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{\Omega A} = \lambda(2, -6, 3)$. On en déduit que l'on a :

$$\begin{cases} x - 3 = 2\lambda \\ y + 4 = -6\lambda \\ z - 2 = 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -4 - 6\lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$$

De plus, comme A appartient au plan, ses coordonnées vérifie l'équation :

$$2x - 6y + 3z - 8 = 0 \Leftrightarrow 2(3 + 2\lambda) - 6(-4 - 6\lambda) + 3(2 + 3\lambda) - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{4}{7}$$

On en déduit que le rayon de la sphère est donné par

$$\Omega A = \left\| -\frac{4}{7}(2, -6, 3) \right\| = \frac{4}{7} \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = 28$$

On applique ensuite la formule du cours et on obtient :

$$\boxed{\mathcal{S} : (x-3)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 28^2}$$