Programme de colle : Semaine 14
Lundi 17 Janvier

I Matrices

1. Calcul sur les matrices : additions, multiplications. (Tous les exercices se feront sur des matrices de taille $n \times m$, avec $n, m \leq 4$)
2. Rang d'une matrice.
3. Matrice inversible et calcul de l'inverse par la méthode du pivot de Gauss.
4. Déterminant d'une matrice 2×2 et formule de l'inverse ($n = 2$)
5. Système linéaire associé à une matrice ($AX = Y$)
6. Calcul des puissances n-émes d'une matrice, les exercices doivent etre guidés.

II Dénombrement

1. Cardinal d'un ensemble, d'une union disjointe et d'une union de deux ensembles quelconques.
2. Lien entre cardinal et injectivité, surjectivité et bijectivité.
3. Choix de p objets parmi n :
   - Avec ordre et répétition n^p
   - Avec ordre et sans répétition, $\frac{n!}{(n-p)!}$
   - Sans ordre et sans répétition, $\binom{n}{p}$
   - Sans ordre et avec répétition. $\binom{n-1+p}{p}$

III Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Savoir définir une variable.
2. Savoir manipuler des conditions (`if, elif, else`)
3. Savoir écrire un script qui calcul une somme, ou les termes d'une suite (boucle `for`)
4. Savoir écrire un script avec une boucle `while`
5. La syntaxe des fonctions a été vue et doit être sue.
6. Boucle sur des listes.
7. Bibliothéque matplolib.pyplot et numpy.
8. Savoir tracer un graphique.
9. Savoir définir une matrice - un tableau.

IV Exercices Types

1. Sans utiliser la fonction floor de Python, ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel x l'entier k tel que $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[$
2. Sans utiliser la fonction floor de Python, ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel x et retourne sa partie entière.
3. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n qui simule n lancers de dé à 6 faces et retourne la somme des valeurs des lancers.
4. Tracer la fonction $f(x) = x^3 + 3x + 1$ entre -1 et 1 à l'aide de la bibliothéque matplotlib.pyplot.

5. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer B^T.
   (b) Calculer $-2A$
   (c) Calculer $-2A + B^T$
6. Soit
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer J^2 et J^3
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$J^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$
7. Soit
$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer le rang de A_λ en fonction de λ.
   (b) Donner l'inverse de A_λ quand cela a un sens.
8. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche à étudier l'inversibilité de A et à calculer les puissances n-ièmes de A.
   (a) Méthode une : Par diagonalisation :
      i. Résoudre $(A - \lambda I_3)X = O_{31}$.
      ii. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
      iii. Calculer $P^{-1}AP$. En notant D cette matrice, exprimer A en fonction de P, P^{-1} et D.
      iv. Calculer les puissances n-ièmes de A.
      v. Étudier l'inversiblité de A. Si A est inversible, calculer son inverse.
   (b) Méthode deux : Par le binôme de Newton :
      i. Soit $B = A - 2I_3$. Calculer B^n en fonction de B pour tout $n \in \mathbb{N}$.
      ii. En déduire alors les puissances n-ièmes de A.
   (c) Méthode trois : Lorsque l'on connaît une relation entre les puissances de la matrice :
      i. Montrer que : $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$.
      ii. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $A^n = a_nA + b_nI_3$.
      iii. Calculer les expresions explicites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire les puissances n-ièmes de A.
      iv. Montrer que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et de I_3.
      v. En reprenant la question précédente, donner l'expression de A^{-n} en fonction de A et de I_3 pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

9. On définit les trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les relations

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & -x_n - 3y_n + 3z_n \\ y_{n+1} & = & 3x_n - 7y_n + 3z_n \\ z_{n+1} & = & 6x_n - 6y_n + 2z_n. \end{array} \right.$$

Soit $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = A^n X_0$$

puis calcul de A^n guidé.

10. Une urne contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures marrons et 2 paires de chaussures blanches. On tire deux chaussures au hasard.
   (a) Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y-a-t-il de tirages où l'on obtient deux chaussures de même couleur ?
   (c) Combien de tirages amènent un pied gauche et un pied droit ?
   (d) Combien de tirages amènent une chaussure droite et une chaussure gauche de même couleur ?