

Programme de colle : Semaine 15

Lundi 24 Janvier

I Dénombrement

1. Cardinal d'un ensemble, d'une union disjointe et d'une union de deux ensembles quelconques.
2. Lien entre cardinal et injectivité, surjectivité et bijectivité.
3. Choix de p objets parmi n :
 - Avec ordre et répétition n^p
 - Avec ordre et sans répétition, $\frac{n!}{(n-p)!}$
 - Sans ordre et sans répétition, $\binom{n}{p}$
 - Sans ordre et avec répétition. $\binom{n-1+p}{p}$

II Géométrie

1. Vecteurs dans le plan et l'espace. Relation de Chasles.
2. Produit scalaire, déterminant 2×2
3. Equation cartésienne d'une droite et d'un cercle dans le plan
4. Equations cartésiennes d'une droite et d'un plan dans l'espace.
5. Représentations paramétriques.

III Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Savoir définir une variable.
2. Savoir manipuler des conditions (`if`, `elif`, `else`)
3. Savoir écrire un script qui calcul une somme, ou les termes d'une suite (boucle `for`)
4. Savoir écrire un script avec une boucle `while`
5. La syntaxe des fonctions a été vue et doit être sue.
6. Boucle sur des listes.
7. Bibliothèque `matplotlib.pyplot` et `numpy`.
8. Savoir tracer un graphique.
9. Savoir définir une matrice - un tableau.

IV Exercices Types

1. Sans utiliser la fonction `floor` de Python, écrire une fonction Python qui prend en argument un réel x l'entier k tel que $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[$
2. Sans utiliser la fonction `floor` de Python, écrire une fonction Python qui prend en argument un réel x et retourne sa partie entière.
3. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n qui simule n lancers de dé à 6 faces et retourne la somme des valeurs des lancers.
4. Tracer la fonction $f(x) = x^3 + 3x + 1$ entre -1 et 1 à l'aide de la bibliothèque `matplotlib.pyplot`.

5. On définit les trois suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient les relations

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= -x_n - 3y_n + 3z_n \\ y_{n+1} &= 3x_n - 7y_n + 3z_n \\ z_{n+1} &= 6x_n - 6y_n + 2z_n. \end{cases}$$

Ecrire un programme python qui permet de calculer la valeur de x_n en fonction de n .

6. Une urne contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures marrons et 2 paires de chaussures blanches. On tire deux chaussures au hasard.

- Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
- Combien y-a-t-il de tirages où l'on obtient deux chaussures de même couleur ?
- Combien de tirages amènent un pied gauche et un pied droit ?
- Combien de tirages amènent une chaussure droite et une chaussure gauche de même couleur ?

7. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

- Démontrer que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.
- Déduire de la question précédente, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parallélogramme $ABCD$ soit rectangle.

8. (a) Déterminer les éventuels points d'intersection de la droite $\mathcal{D} : x + 3y - 4 = 0$ et du cercle $\mathcal{C}_k : x^2 + y^2 - 6y + k = 0$ pour $k = 4$, $k = \frac{13}{2}$ et $k = 8$.

(b) Déterminer les éventuels points d'intersection des cercles $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$ et $\mathcal{C}' : x^2 + y^2 + x - 3y = 0$.

(c) On considère l'ensemble $\mathcal{C}'_k : x^2 + y^2 - 4x + 2y + k = 0$.

Déterminer sa forme géométrique en fonction de la valeur de k .

9. Déterminer la droite \mathcal{D} contenant le point $A = (2, 1, 3)$ parallèle au plan d'équation $x + y + z = 2$ et rencontrant la droite \mathcal{D}' d'équations cartésiennes $x = 1$ et $y = z$.