CH13 - suites récurrentes exemples

Table des matières

I Rappels

I. 1 Suites arithmétiques

Définition 1. $u_{n+1} = u_n + r$

I. 2 Suites géométrique

Définition 2. $u_{n+1} = qu_n$

I. 3 Suites arithémético géométrique

Définition 3. $u_{n+1} = qu_n + r$

Rappel de la méthode : $v_n = u_n - \alpha$ et v_n géométrique.

I. 4 Suites récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients CONSTANTS

Définition 4. $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Rappel de deux méthodes :

1. Polynôme caractéristique.
2. Par la puissance d'une matrice : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} X_n$$

II Etude de $u_{n+1} = f(u_n)$

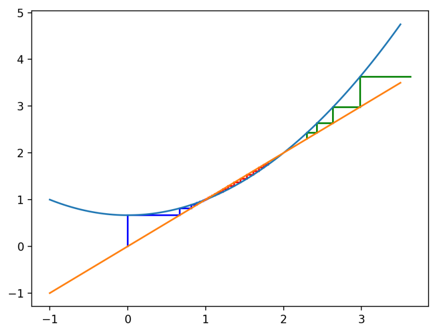
Sur l'exemple suivant :

Exercice 5. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n^2 + \dfrac{2}{3} \end{cases}$

1. Étudier la fonction f associée.
2. Montrer que $I_1 = [-1, 1]$, $I_2 = [1, 2]$ et $I_3 = [2, +\infty[$ sont des intervalles stables par f.
3. Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.
4. Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$?
6. On suppose que $u_0 \in]-1, 1[$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in]-1, 1[$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. On suppose que $u_1 \in [1, 2]$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in [1, 2]$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. On suppose que $u_0 > 2$.
   (a) Montrer que $u_n > 2$.
   (b) En déduire le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II. 1 Représentation graphique de u_n

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

X=np.linspace(-1,3.5,100)
Y=(X**2+2)/3
plt.clf()
def f(x):
    return((x**2+2)/3)
u=0
for i in range(100):

    plt.plot( [u,f(u)],[f(u),f(u)]  ,'b')
    plt.plot( [u,u],[u,f(u)],'b')
    u=f(u)

u=1.8
for i in range(100):

    plt.plot( [u,f(u)],[f(u),f(u)]  ,'r')
    plt.plot( [u,u],[u,f(u)],'r')
    u=f(u)
u=2.3
for i in range(4):

    plt.plot( [u,f(u)],[f(u),f(u)]  ,'g')
    plt.plot( [u,u],[u,f(u)],'g')
    u=f(u)

plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,X)

plt.show()
```



II. 2 Etude des valeurs possibles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Question 1 On étudie la fonction f associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est-à-dire dans notre cas : $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$

Définition 6. Intervalles stables.

Question 2.

II. 3 Etude du sens de variations

Rappel : Le sens de variations est donné par l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$
Question 3

II. 4 Limites éventuelles et limites

Proposition 7. SI $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite ℓ vérifie $f(\ell)=\ell$

Question 4

Question 5,6,7,8.