TD 15 : Limites et continuité

I Calculs de limites

Exercice 1. Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition. On justifiera correctement les résultats. On fera, lorsque cela est possible, l'interprétation graphique des résultats.

1. $f(x) = e^{x^2+x+1}$
2. $f(x) = e^{2x} - e^x$
3. $f(x) = \dfrac{e^x + x^2 + x + 1}{e^{2x} + 1}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$
5. $f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}$
6. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$
7. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + x^2}{2x+1}\right)$
8. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$
9. $f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1}$
10. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \ln x$
11. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$
12. $f(x) = e^x - x^{\frac{2}{3}}$
13. $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$
14. $f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x-2}}$
15. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

Exercice 2. Avec des polynômes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^7+4x^2-1}{x^9+1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to -5^+} \frac{x^2+2x-15}{x^2+4x-5}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2x}{2x^2-1}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x^3-1}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{|x+2|}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 - 3x + 1 - x|x-3|$
11. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 - 3x + 1 - x|x-3|$

Exercice 3. Fonctions exponentielle et logarithme :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{e}} e^{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}},\ a > 0$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{x+2}}}\right)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln x}\right)^{\ln(1/x)}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(1 + \frac{1}{\ln x}\right)^{\ln(1/x)}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (1+e^x)^{1/x}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x^2) + \ln(2x) - x^3}{3x^3 + \sin x - x}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x}\left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1\right)$

Exercice 4. Avec des racines :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x + 2 - \sqrt{x^2-3x-1}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x^3}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + x$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{7+2x}-3}{x^2-1}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}$, $(n,m) \in \mathbb{N}^2$

Exercice 5. Fonctions trigonométriques :

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2+1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\cos x}{x^2+1}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2-\ln x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(3x)}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(6x)}{\tan(4x)}$
9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x-1}{2\sin x-\sqrt{3}}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan x-\sin x}{x}\right)^{x^2}$

Exercice 6. Avec la fonction partie entière.

1. La fonction g définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $g(x)=x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ a-t-elle une limite en $+\infty$?
2. La fonction h définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $h(x)=\dfrac{1}{x}-\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ a-t-elle une limite en $+\infty$?
3. Soient a et b strictement positifs. Calculer :

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{a}\left\lfloor\dfrac{b}{x}\right\rfloor$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{b}{x}\left\lfloor\dfrac{x}{a}\right\rfloor$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{b}{x}\left\lfloor\dfrac{x}{a}\right\rfloor$
4. Étudier $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor\right)$.

Exercice 7. Avec des valeurs absolues. Soit f telle que $f(x)=\dfrac{|x-3|-2x}{4x-6-|x+3|}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Étudier l'existence d'une limite en $a=3$, d'une limite à droite en 3 et d'une limite à gauche en 3.

II Propriétés générales avec les limites

Exercice 8. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est périodique de période T et que f admet une limite finie l quand x tend vers $+\infty$. Démontrer que f est la fonction constante de valeur l.

Exercice 9. Montrer que la fonction $x\mapsto \sin x+\cos x$ n'admet pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$.

III Calculs d'équivalents

Exercice 10. Donner la limite, ainsi qu'un équivalent au point considéré.

1. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$ en $+\infty$
2. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$ en $+\infty$
3. $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$ en $+\infty$.
   Discuter en fonction de a et de b.
4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x}$ en $+\infty$
5. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^4}$ en $+\infty$
6. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^4}$ en $+\infty$

Exercice 11. Donner la limite, ainsi qu'un équivalent au point considéré.

1. $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ en $+\infty$
2. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}$ en $+\infty$ puis en 0
3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+x}} - \sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$ en 0 puis en $+\infty$.
4. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x^2+1}}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = e^{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$ en $+\infty$

Exercice 12. Donner la limite, ainsi qu'un équivalent au point considéré.

1. $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$ en 0^+
2. $f(x) = \dfrac{1 - e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^x}}{e^{-x}}$ en $+\infty$
3. $f(x) = \dfrac{e^{ax}-1}{x-x^2}$ en 0 puis en $+\infty$ ($a \in \mathbb{R}$)
4. $f(x) = \dfrac{x^\alpha \ln x}{x^x - 1}$ en 0^+ ($\alpha > 0$)
5. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\ln(x^2-x+1)}$ en 1
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{e^x-1}}{x+\ln x - 1}$ en 0 puis en $+\infty$.
7. $f(x) = x\left(\ln(x+1) - \ln x\right)$ en $+\infty$
8. $f(x) = (x+1)(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ en $+\infty$.
9. $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)$ en $+\infty$
10. $f(x) = (\ln x)^4 - \dfrac{x}{(\ln x)^2}$ en $+\infty$

Exercice 13. Donner la limite, ainsi qu'un équivalent au point considéré.

1. $f(x) = \dfrac{3^x-1}{2^x-1}$ en $x = 0$
2. $f(x) = 2^{x+1} - 2^x$ en $+\infty$
3. $f(x) = 2^{x^2+x} - 2^{x^2}$ en $+\infty$
4. $f(x) = (2^x)^x + 2^{x^2} + (4^x)^2$ en $+\infty$
5. $f(x) = (x+1)^x$ en $+\infty$
6. $f(x) = (x-1)^x$ en $+\infty$
7. $f(x) = (x+1)^x - x^x$ en $+\infty$

Exercice 14. Calculer la limite de f en $+\infty$ pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \left(\dfrac{x}{x-a}\right)^x$, $a > 0$
2. $f(x) = \left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^x$, $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, $a \neq b$
3. $f(x) = \left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x$

IV Étude de la continuité de fonctions numériques

Exercice 15. Étudier la continuité des deux fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto (x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \cos(\ln|x|)\ln(1+x).$$

Exercice 16. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{e^{x^2}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 17. On considère la fonction h définie par

$$h(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{si } |x| < 1 \qquad \text{et} \qquad h(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{si } |x| \geq 1.$$

Déterminer les réels a, b et c pour lesquels h est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \max(f(x), g(x)) = \dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$.
2. En déduire que la fonction $\max(f,g)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

V Existence d'un éventuel prolongement par continuité

Exercice 19. Étudier la continuité des fonctions suivantes. Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement par continuité aux bornes finies de leur domaine de définition ?

1. $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. $f(x) = \dfrac{|x|\ln(1+x)}{e^{2x^2}-1}$.
3. $f(x) = \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1)$.
4. $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{1+x}}$
7. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$
8. $f(x) = \dfrac{1-\cos(\sqrt{x})}{|x|}$
9. $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$
10. $f(x) = x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
11. $f(x) = \dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1}$
12. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$
13. $f(x) = x^x$

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Étudier la continuité de $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{e^x-1}$.
L'application f admet-elle un prolongement par continuité aux bornes de son domaine de définition ?

Exercice 21. Soit n un entier naturel non nul. On définit f_n par $f_n(x) = \dfrac{e^{x^2}-e}{x^{2n}-1}$. Quel est son ensemble de définition ? La fonction f_n admet-elle un prolongement par continuité définie sur $\mathbb{R}$?

Exercice 22. Montrer que pour $a > -1$, la fonction f_a définie par $f_a(x) = |x|^a \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$.

VI Applications des théorèmes sur la continuité

Exercice 23. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède au moins une solution dans $[0,1]$.

Exercice 24. Étude des points fixes d'une fonction.

1. Montrer que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue sur $[0,1]$ alors f admet un point fixe dans $[0,1]$.
2. Montrer que si f est continue et décroissante sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, f admet un unique point fixe dans $[0,1]$.

Exercice 25. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer que si f possède des limites finies en $-\infty$ et en $+\infty$ alors elle est bornée.

Exercice 26. Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ et $g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues sur $[0,1]$ et telles que $f \circ g = g \circ f$. Le but est de montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$. On va raisonner par l'absurde en supposant que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \neq g(x).$$

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) > g(x)$.
2. Démontrer qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) \geq g(x) + m$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$: $f^n(x) \in [0,1]$ et $g^n(x) \in [0,1]$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \ \forall x \in [0,1], \quad f^n(x) \geq g^n(x) + nm$.
5. Conclure.

Exercice 27. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = g\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que g est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28. Le but est de déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On considère une telle fonction et on pose $a = f(1)$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que la fonction f est impaire.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(nx) = nf(x)$. On pourra commencer à le montrer pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que : $\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star, \quad f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q}a$.
5. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xa$ (on pourra utiliser en l'admettant le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels).
6. Conclure.