TD Probabilités - Correction

I Notions de base

Correction 1.

Il s'agit ici uniquement de formuler les événements à l'aide de R_1, R_1, R_3.

- $A = R_1 \cup R_2 \cup R_3$.
- $B = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_3) \cup (R_2 \cap R_3)$
- $C = (R_1 \cap \overline{R}_2 \cap \overline{R}_3) \cup (R_2 \cap \overline{R}_1 \cap \overline{R}_3) \cup (R_3 \cap \overline{R}_1 \cap \overline{R}_1)$.
- $D = R_1 \cup R_2$.

Correction 2.

Même chose que dans l'exercice précédent.

- $A = (M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4) \cup (M_2 \cap \overline{M}_1 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4) \cup (M_3 \cap \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_4) \cup (M_4 \cap \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3)$.
- $B = \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2 \cup \overline{M}_3$.

Correction 3.

- Notations : on note J l'événement « être vacciné contre la fièvre jaune », D l'événement « être vacciné contre la diphtérie » et T l'événement « être vacciné contre aucune de ces deux maladies ».
- Traduction des données de l'énoncé : $P(J) = \dfrac{9}{20}$, $P(D) = \dfrac{3}{5}$ et $P(J \cap D) = \dfrac{3}{10}$.
- Calcul de $P(T)$:
  On remarque que $T = \overline{J} \cap \overline{D}$. Or on a : $\overline{T} = J \cup D$ et ainsi on obtient que : $P(T) = 1 - P(\overline{T})$. On calcule donc $P(\overline{T})$: les événements J et D ne sont pas incompatibles, on utilise donc la formule du crible et on obtient que : $P(\overline{T}) = P(J) + P(D) - P(J \cap D) = \dfrac{3}{4}$. Ainsi on a : $\boxed{P(T) = \dfrac{1}{4}}$.

Correction 4.

- Notations : on note A l'événement « présenter le défaut A »et B l'événement « présenter le défaut B ». On note aussi T l'événement « ne présenter aucun défaut »et S l'événement « présenter un seul défaut ».
- Traduction des données : $P(A \cap B) = \dfrac{1}{50}$, $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{1}{20}$ et $P(B) = \dfrac{1}{10}$.
- Calcul de $P(A)$:
  Comme $(B, \overline{B})$ est un sce, on a d'après la formule des probabilités totales que : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{1}{50} + \dfrac{1}{20} = \dfrac{7}{100}$.
- Calcul de $P(T)$:
  On remarque que $T = \overline{A} \cap \overline{B}$. Ainsi on a que $\overline{T} = A \cup B$ et donc $P(T) = 1 - P(\overline{T})$. Calculons $P(\overline{T})$. Comme les événements A et B ne sont pas incompatibles, on utilise la formule du crible et on obtient que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{3}{20}$. Ainsi on a : $P(T) = \dfrac{17}{20}$.
- Calcul de $P(S)$:
  On remarque que : $S = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Or les deux événements $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles deux à deux et ainsi on a : $P(S) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$. On connaît $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{1}{20}$. Il reste à calculer $P(\overline{A} \cap B)$. Pour cela on peut utiliser par exemple $P(B)$. En effet $(A, \overline{A})$ est un sce ainsi d'après la formule des probabilités totales, on obtient que : $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \Leftrightarrow P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{2}{25}$. Finalement on obtient alors que $\boxed{P(S) = \dfrac{13}{100}}$.

II Équiprobabilités

Correction 5.

- L'univers est l'ensemble des combinaisons de 5 éléments parmi 32 et ainsi $\text{Card}(\Omega) = \binom{32}{5}$.
- On munit l'univers de la probabilité uniforme car on tire les cartes au hasard.
- Notations : on note A l'événement « tirer 5 cartes de la même couleur », B l'événement « tirer (2as et 3 rois) ou (3 as et 2 rois) » et C l'événement « tirer au moins un as et deux rois exactement ».

1. Comme on a muni l'univers de la probabilité uniforme, on obtient que : $P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{8}{5}}{\binom{32}{5}}$ car il faut d'abord choisir la couleur puis prendre les 5 cartes dans la couleur choisie.
2. Si on note B_1 l'événement « tirer 2 as et 3 rois » et B_2 l'événement « tirer 3 as et 2 rois », on a $B = B_1 \cup B_2$ et les événements B_1 et B_2 sont incompatibles donc $P(B) = P(B_1) + P(B_2)$. On obtient ainsi : $P(B) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{4}{3}}{\binom{32}{5}} + \dfrac{\binom{4}{2}\binom{4}{3}}{\binom{32}{5}} = \dfrac{2\binom{4}{2}\binom{4}{3}}{\binom{32}{5}}$.
3. On a $P(C) = \dfrac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)}$ et $\text{Card}(C) = \binom{4}{2}\left[\binom{4}{1}\binom{26}{2} + \binom{4}{2}\binom{26}{1} + \binom{4}{3}\right]$. Dans la parenthèse, on a calculé, une fois les 2 rois choisis, le cardinal pour avoir exactement 1 as ou exactement 2 as ou exactement 3 as. Ainsi on obtient que $P(C) = \dfrac{\binom{4}{2}\left[\binom{4}{1}\binom{26}{2} + \binom{4}{2}\binom{26}{1} + \binom{4}{3}\right]}{\binom{32}{5}}$.

Correction 6.

- Soit n le nombre d'élèves dans la classe. Le choix des différentes dates d'anniversaires se fait avec ordre et avec répétition car deux personnes peuvent être nées le même jour. L'univers est donc l'ensemble des n-listes de l'ensemble $[\![1, 365]\!]$ et ainsi $\text{Card}(\Omega) = 365^n$ (on a 365 choix pour la date d'anniversaire de la première personne, 365 choix pour la date d'anniversaire de la deuxième personne...).
- On munit l'univers de la probabilité uniforme car il y a équiprobabilité sur le jour de naissance des personnes.
- Notation : on note A l'événement « Au moins deux personnes sont nées le même jour ».

Il est plus simple ici de passer à l'événement contraire. On a $\overline{A}$: « Toutes les personnes sont nées des jours différents ».

Comme on a muni l'univers de la probabilité uniforme, on obtient que : $P(\overline{A}) = \dfrac{\text{Card}(\overline{A})}{\text{Card}(\Omega)}$. Or pour calculer $\text{Card}\left(\overline{A}\right)$ il faut choisir les dates d'anniversaire dans $[\![1, 365]\!]$ mais sans répétition. Ainsi, il y a 365 choix possibles pour la première personne, 364 choix possibles pour la deuxième personne,.... et $365 - n + 1$ choix possibles pour la n-ième personne. On obtient donc que : $P(\overline{A}) = \dfrac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n}$.

On obtient : $\boxed{P(A) = 1 - \dfrac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n}.}$

Pour $n = 47$, on trouve $P(A) \simeq 0.95$. Il y a donc une très forte probabilité que 2 élèves aient la même date d'anniversaire dans la classe !

Correction 7.

Si on note T l'événement « au moins un des trois événements A, B et C est réalisés » alors on a : $T = A \cup B \cup C$. Ces trois événements ne sont pas incompatibles deux à deux et ainsi on utilise la formule du crible. On obtient donc : $P(T) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$. Calculons chacun de ces événements.

- L'univers Ω est l'ensemble des 3-uplet d'éléments pris parmi 6 et ainsi $\text{Card}(\Omega) = 6^3$. En effet, il y a ordre car les dés sont distincts (par exemple de couleurs différentes) et il y a répétition.

- Comme les 3 dés sont équilibrés, on munit Ω de la probabilité uniforme.
- Calcul de $P(T)$:
  - ⋆ On a : $P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{6}{6^3} = \dfrac{1}{36}$.
  - ⋆ On a : $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \dfrac{\mathrm{Card}\,\overline{B}}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 1 - \dfrac{5^3}{6^3} = \dfrac{6^3 - 5^3}{6^3}$.
  - ⋆ On a : $P(C) = \dfrac{\mathrm{Card}(C)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{3}{6^3} = \dfrac{1}{72}$ car il n'y a que 3 possiblités pour obtenir une somme de 4.
  - ⋆ On a : $P(A \cap B) = \dfrac{\mathrm{Card}\,A \cap B}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{1}{6^3}$ car la seule solution est d'avoir les 3 numéros qui valent 3.
  - ⋆ On a : $P(A \cap C) = \dfrac{\mathrm{Card}\,A \cap C}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 0$ car $A \cap C = \emptyset$.
  - ⋆ On a : $P(B \cap C) = \dfrac{\mathrm{Card}\,B \cap C}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 0$ car $B \cap C = \emptyset$.
  - ⋆ On a : $P(A \cap B \cap C) = \dfrac{\mathrm{Card}\,A \cap B \cap C}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 0$ car $A \cap B \cap C = \emptyset$.

On obtient ainsi que $P(T) = \dfrac{99}{216}$.

Correction 8.

- L'univers Ω est l'ensemble des 6-uplet d'éléments pris parmi 6 et ainsi $\mathrm{Card}(\Omega) = 6^6$. En effet, il y a ordre car les dés sont distincts (par exemple de couleurs différentes) et il y a répétition.
- Comme les 6 dés sont équilibrés, on munit Ω de la probabilité uniforme.
- Notations des événements : on note A l'événement « obtenir les 6 résultats possibles » et B l'événement « obtenir au moins deux résultats distincts ».
- Calcul de $P(A)$: pour obtenir les 6 résultats possibles, on doit obtenir une permutation de $[\![1,6]\!]$. Comme il y a 6! telles permutations, on en déduit que $P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{6!}{6^6}$.
- Calcul de $P(B)$: il est plus simple ici de passer à l'événement contraire.
  On a $P(B) = 1 - P(\overline{B})$ avec $\overline{B}$: « avoir tous les résultats identiques ».
  Or il n'y a que 6 possibilités pour avoir les résultats tous identiques.
  Ainsi, on obtient que : $P(B) = 1 - \dfrac{\mathrm{Card}(\overline{B})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 1 - \dfrac{6}{6^6} = \dfrac{6^5 - 1}{6^5}$.

Correction 9.

- L'univers est l'ensemble des 4-listes pris parmi 4 éléments. Ainsi $\mathrm{Card}(\Omega) = 4^4$.
- Le choix du tiroir se fait au hasard ainsi on munit Ω de la probabilité uniforme.
- On note A l'événement « les 4 tiroirs sont occupés ». On a : $P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{4!}{4^4}$ car on a 4 choix pour la boule 1, puis 3 choix pour la boule 2, puis 2 choix pour la boule 3 et enfin 1 seul choix pour la boule 4.
- On note B l'événement « un seul tiroir est occupé ». On a : $P(B) = \dfrac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{4}{4^4} = \dfrac{1}{4^3}$ car il faut faire le choix du tiroir et il y a ainsi 4 choix possibles et ensuite toutes les boules vont dans ce même tiroir.
- On note C l'événement « les boules 1 et 2 se trouvent dans les deux premiers tiroirs ». On a : $P(C) = \dfrac{\mathrm{Card}(C)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{2^2 \times 4^2}{4^4} = \dfrac{1}{4}$ car on a deux choix possibles pour les 2 premières boules puis 4 choix possibles pour les deux dernières boules.

Correction 10.

1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note N_i l'événement « tirer une boule noire au tirage i » et on note G l'événement « être gagnant ». Ainsi on a : $G = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_n$. Comme il y a remise, on répète bien la même expérience n fois dans les mêmes conditions. Ainsi les événements $(N_1, N_2, \ldots, N_n)$ sont mutuellement indépendants et on a : $P(G) = P(N_1)P(N_2)\ldots P(N_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. On pouvait aussi calculer cette probabilité sans utiliser la mutuelle indépendance mais avec du dénombrement car on est dans un cadre d'ordre et de répétition.

2. Pour cela, on montre que la fonction $f : x \mapsto \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$ est croissante sur $[2,+\infty[$. Il s'agit ici d'une étude classique de fonction. La fonction f est dérivable sur $[2,+\infty[$ comme quotient, somme et composée de fonctions et pour tout $x \geq 2$: $f'(x) = f(x)\left[\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}\right]$. On pose pour tout $x \geq 2$: $g(x) = \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}$. Cette fonction est elle aussi dérivable sur $[2,+\infty[$ et pour tout $x \geq 2$: $g'(x) = \frac{-1}{x(x-1)^2}$. Ainsi comme on est sur $[2,+\infty[$, g' est négative et ainsi la fonction g est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$. De plus $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ par propriété sur les somme, quotient et composée de limites. Ainsi la fontion g reste positive sur $[2,+\infty[$. Donc f' est positive sur $[2,+\infty[$ comme produit de deux nombres positifs et car f est bien positive car c'est une exponentielle. Ainsi la fonction f est bien croissante sur $[2,+\infty[$. Et donc en particulier on a la croissance de la fonction $n \mapsto \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ sur $\mathbb{N}^\star \setminus \{1\}$. De plus si $n=1$, il n'y a pas de boule noire et ainsi $P(G) = 0$. Ceci prouve la croissance sur $\mathbb{N}^\star$ car pour tout $n \geq 2$: $f(n) \geq 0 \Leftrightarrow f(n) \geq f(1)$. Donc $\boxed{\text{la fonction } n \mapsto \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \text{ est bien croissante sur } \mathbb{N}^\star}$.

3.
   - Comme la fonction $n \mapsto \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ est croissante sur $\mathbb{N}^\star$, plus le nombre de boules totales n augmente, plus le nombre $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ augmente aussi, à savoir plus la probabilité de gagner augmente. Le joueur a donc intérêt à ce que le nombre de boules totales soient le plus grand possible.
   - En utilisant les équivalents usuels, on a : $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{=\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$. On obtient donc que : $n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{=\infty}{\sim} -1$. Ainsi, on a : $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -1$ puis par propriété sur la composition de limite, on a : $\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{-1}$. Or comme $p_n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on obtient que : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = e^{-1}}$.

III Probabilité conditionnelle et formules

Correction 11.

1.
   - Notations : on note B_i l'événement « tirer une boule blanche au tirage i », N_i l'événement « tirer une boule noire au tirage i »et on note S l'événement « on tire deux boules de couleurs différentes ».
   - Expression de S : $S = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$.
   - Calcul de $P(S)$:
     - ⋆ Comme les événements $B_1 \cap N_2$ et $N_1 \cap B_2$ sont incompatibles, on a : $P(S) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2)$.

- ⋆ Calcul de $P(B_1 \cap N_2)$: on a $P(B_1) = \dfrac{b}{b+n}$, car les tirages sont font avec équiprobabilité, donc $P(B_1) \neq 0$. Ainsi, d'après la formule des probabilités composées : $P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2)$. De plus, on a : $P_{B_1}(N_2) = \dfrac{n}{n+b-1}$ car on a enlevé une boule blanche de l'urne. Ainsi, on obtient que : $P(B_1 \cap N_2) = \dfrac{b}{b+n} \times \dfrac{n}{n+b-1}$.
- ⋆ Calcul de $P(N_1 \cap B_2)$: de même, on a $P(N_1) = \dfrac{n}{b+n} \neq 0$, donc d'après la formule des probabilités composées : $P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P_{N_1}(B_2)$. De plus, on a : $P_{N_1}(B_2) = \dfrac{b}{n+b-1}$. Ainsi, on obtient que : $P(N_1 \cap B_2) = \dfrac{n}{b+n} \times \dfrac{b}{n+b-1}$.
- ⋆ Conclusion : $\boxed{P(S) = \dfrac{2nb}{(b+n)(b+n-1)}}$.

2. • Expression de S : de même qu'à la question 1, $S = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$.
   • Calcul de $P(S)$:
   - ⋆ Comme les événements $B_1 \cap N_2$ et $N_1 \cap B_2$ sont incompatibles, on a : $P(S) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2)$.
   - ⋆ Calcul de $P(B_1 \cap N_2)$: on a toujours $P(B_1) = \dfrac{b}{b+n} \neq 0$, donc d'après la formule des probabilités composées : $P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P_{B_1}(N_2)$. De plus, on a cette fois : $P_{B_1}(N_2) = \dfrac{n}{n+b+2}$ car on a remis la boule blanche ainsi que 2 autres boules blanches. Ainsi, on obtient que : $P(B_1 \cap N_2) = \dfrac{b}{b+n} \times \dfrac{n}{n+b+2}$.
   - ⋆ Calcul de $P(N_1 \cap B_2)$: on a toujours $P(N_1) = \dfrac{n}{b+n} \neq 0$, donc d'après la formule des probabilités composées : $P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P_{N_1}(B_2)$. De plus, on a : $P_{N_1}(B_2) = \dfrac{b}{n+b-1}$ car on ne remet pas de boule dans l'urne. Ainsi, on obtient que : $P(N_1 \cap B_2) = \dfrac{n}{b+n} \times \dfrac{b}{n+b-1}$.
   - ⋆ Conclusion : $\boxed{P(S) = \dfrac{2nb}{b+n}\left[\dfrac{1}{n+b+2} + \dfrac{1}{n+b-1}\right]}$.

Correction 12.

1. On note S l'évènement « ouvrir la porte au k-ième essai » et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: C_j l'évènement « la j-ième clé ouvre la porte ». On a donc
$$S = \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \cap \cdots \cap \overline{C_{k-1}} \cap C_k.$$
Or ici Mr G. ne met pas de côté les mauvaises clés : les événements sont donc mutuellement indépendants. On a donc :
$$P(S) = P(\overline{C_1}) \times P(\overline{C_2}) \times \ldots \times P(\overline{C_{k-1}}) \times P(C_k).$$
De plus, comme Mr G. choisit les clés au hasard, la probabilité d'avoir une mauvaise clé vaut $\dfrac{n-1}{n}$ et la probabilité d'avoir la bonne clé vaut $\dfrac{1}{n}$. On a donc : $\boxed{P(S) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{n}}$.
2. Attention, cette fois Mr G. met de côté les mauvaises clés : les événements ne sont pas mutuellement indépendants, il faut utiliser la formule des probabilités composées. Il faut de plus supposer que l'on a $k \leq n$, car au bout de n essais, Mr G. est sûre d'avoir trouvé la bonne clé.
On a $P(\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{k-1}}) \neq 0$, car il est possible de choisir $k-1$ fois de suite une mauvaise clé si $k \leq n$. On peut alors utiliser la formule des probabilités composées et on obtient que :
$$P(S) = P(\overline{C_1})P_{\overline{C_1}}(\overline{C_2})P_{\overline{C_1}\cap\overline{C_2}}(\overline{C_3}) \times \cdots \times P_{\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{k-2}}}(\overline{C_{k-1}})P_{\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{k-1}}}(C_k).$$
On a de plus :

- ⋆ $P(\overline{C_1}) = \dfrac{n-1}{n}$ car on choisit la clé au hasard donc il y a équiprobabilité, et il y a $n-1$ clés qui n'ouvrent pas la porte pour n clés en tout.
- ⋆ $P_{\overline{C_1}}(\overline{C_2}) = \dfrac{n-2}{n-1}$ car on a enlevé une mauvaise clé du trousseau, donc il reste $n-2$ qui ne marchent pas pour $n-1$ clés au total.
- ⋆ On continue ainsi de suite, jusqu'à $P_{\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{k-2}}}(\overline{C_{k-1}}) = \dfrac{n-1-(k-2)}{n-(k-2)} = \dfrac{n-k+1}{n-k+2}$ car on a enlevé $k-2$ mauvaises clés.
- ⋆ Enfin, on a : $P_{\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{k-1}}}(C_k) = \dfrac{1}{n-(k-1)} = \dfrac{1}{n-k+1}$ car on a enlevé $k-1$ mauvaises clés, et il n'y a qu'une seule clé qui ouvre la porte.

Calculons alors $P(S)$. On a :

$$P(S) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

Ainsi $\boxed{\text{la probabilité de trouver la bonne clé au } k\text{-ième essai est } \frac{1}{n}.}$

Correction 13.

1. • On suppose que $n \leq N-1$. On a $A_n = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{n-1} \cap \overline{R_n}$. Comme tous ces événements ne sont pas mutuellement indépendants, on utilise la formule des probabilités composées et on obtient sous réserve que toutes les probabilités conditionnelles existent bien :

$$P(A_n) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1\cap R_2}(R_3) \times \cdots \times P_{R_1\cap\cdots\cap R_{n-2}}(R_{n-1})P_{R_1\cap\cdots\cap R_{n-1}}(\overline{R_n}).$$

   • On a : $P(R_1) = \dfrac{r}{N}$.
   De plus $P(R_1) \neq 0$ car $r \neq 0$ et ainsi P_{R_1} existe bien.

   • On a : $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{r-1}{N}$ d'après le protocole.
   De plus $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \dfrac{r(r-1)}{N^2} \neq 0$ car $r \neq 0$ et $r \neq 1$ et ainsi $P_{R_1\cap R_2}$ existe bien.

   • On a : $P_{R_1\cap R_2}(R_3) = \dfrac{r-2}{N}$ d'après le protocole.
   De plus $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times P_{R_1\cap R_2}(R_3) = \dfrac{r(r-1)(r-2)}{N^3} \neq 0$ car $r \neq 0$, $r \neq 1$ et $r \neq 2$ et ainsi $P_{R_1\cap R_2\cap R_3}$ existe bien.

   • En itérant ainsi les calculs on montre que toutes les probabilités conditionnelles existent bien et on obtient que :

$$\boxed{P(A_n) = \frac{r!}{N^n} \times \frac{b+n-1}{(r-n+1)!}}.$$

2. (a) • On peut remarquer que $C_0 = A_{r+1}$ car $C_0 = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{n-1} \cap R_r \cap \overline{R}_{r+1}$ car il faut commencer par tirer toutes les boules rouges pour qu'il n'en reste aucune (le protocole nous disant qu'on ne remet jamais de boule rouge dans l'urne). Ainsi d'après la question précédente, on obtient que : $P(C_0) = \dfrac{r!}{N^r}$ en remplaçant dans la formule précédente tous les n par $r+1$.

   • Soit $m \geq 1$ fixé. De même, on a : $C_m = A_{r-m+1}$ car il faut commencer par tirer $r-m$ boules rouges puis la première boule banche. En effet, en tirant tout d'abord $r-m$ boules rouges, il va bien rester m boules rouges dans l'urne. Ainsi en remplaçant tous les n par des $r-m$ dans la formule de la question précédente, on obtient que : $P(C_m) = \dfrac{r!}{N^r} \times \dfrac{N^m}{N} \times \dfrac{N-m}{m!} = \dfrac{r!}{N^r} \times \dfrac{N^m}{m!} \times \dfrac{N-m}{N}$. Mais $\dfrac{N-m}{N} = 1 - \dfrac{m}{N}$ et ainsi, en développant, on obtient que : $\boxed{P(C_m) = \dfrac{r!}{N^r}\left(\dfrac{N^m}{m!} - \dfrac{N^{m-1}}{(m-1)!}\right)}$. On obtient bien le résultat voulu.

(b)
- On a : $\sum_{m=0}^{r} P(C_m) = P(C_0) + \sum_{m=1}^{r} \frac{r!}{N^r}\left(\frac{N^m}{m!} - \frac{N^{m-1}}{(m-1)!}\right) = P(C_0) + \frac{r!}{N^r}\left(\sum_{m=1}^{r} \frac{N^m}{m!} - \sum_{m=1}^{r} \frac{N^{m-1}}{(m-1)!}\right)$
  On reconnaît une somme télescopique et ainsi, on a : $\sum_{m=0}^{r} P(C_m) = P(C_0) + \frac{r!}{N^r}\left(\frac{N^r}{r!} - \frac{N^0}{(0)!}\right) = \frac{r!}{N^r} + 1 - \frac{r!}{N^r} = 1$. On obtient bien le résultat voulu.
- On obtient ainsi que $\bigcup_{m=0}^{r} C_m = \Omega$ car les $(C_m)_{m\in[\![0,r]\!]}$ forment un sce : ils sont incompatibles deux à deux et la somme de leurs probabilités fait 1.

Correction 14.

- Notations : pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note B_i l'événement « tirer une boule blanche au tirage i »et N_i l'événement « tirer une boule noire au tirage i ». On a ainsi pour tout $i \in \mathbb{N}$: $p_i = P(B_i)$.
- Calcul de $p_1 = P(B_1)$. Comme on tire au hasard une boule dans l'urne 1, on peut utiliser la probabilité uniforme et on obtient que : $P(B_1) = \frac{b}{b+n}$ d'après l'énoncé.
- On fixe $i \in \mathbb{N}$ et on cherche une relation de récurrence entre p_i et p_{i+1}.(B_i, N_i) est un sce donc d'après la formule des probabilités totales, on obtient que : $P(B_{i+1}) = P(B_{i+1} \cap B_i) + P(B_{i+1} \cap N_i)$. Comme on a : $P(B_i) \neq 0$ et $P(N_i) = 1 - P(B_i) \neq 0$ d'après le protocole. Ainsi les probabilités conditionnelles P_{B_i} et P_{N_i} existent bien et on peut utiliser la formule des probabilités totales. On obtient que : $P(B_{i+1}) = P_{B_i}(B_{i+1})P(B_i) + P_{N_i}(B_{i+1})P(N_i)$. Or on a : $P(B_i) = p_i$, $P(N_i) = 1 - p_i$. De plus d'après le protocole, on obtient que : $P_{B_i}(B_{i+1}) = \frac{b+1}{2b+1}$ et $P_{N_i}(B_{i+1}) = \frac{b}{2b+1}$. Ainsi, on obtient la relation : $p_{i+1} = \frac{1}{2b+1}p_i + \frac{b}{2b+1}$.
- On reconnaît alors une suite arithmético-géométrique. Je ne donne que le résultat, je vous laisse faire les calculs. On obtient que pour tout $i \in \mathbb{N}$: $p_i = \left(\frac{b}{b+n} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2b+1}\right)^i + \frac{1}{2}$. Comme $-1 < \frac{1}{2b+1} < 1$, on a : $\lim_{i\to+\infty} \left(\frac{1}{2b+1}\right)^i = 0$. Puis par propriété sur les produit et somme de limites, on obtient que : $\lim_{i\to+\infty} p_i = \frac{1}{2}$.

Correction 15.

On note S l'évènement « A tire un numéro qui soit au moins le double du numéro de B » et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose B_i l'évènement « B tire le numéro i ».
Pour que A tire un numéro qui soit au moins le double du numéro de B, il faut déjà connaître le numéro tiré par B. Mais $(B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n)$ est un sce donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(S) = \sum_{i=1}^{n} P(S \cap B_i).$$

De plus on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $P(B_i) = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$. Ainsi pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $P(B_i) \neq 0$ et ainsi la probabilité conditionnelle P_{B_i} existe bien. On peut donc appliquer la formule des probabilités composées et on obtient que

$$P(S) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(S) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{B_i}(S).$$

Il reste alors à calculer $P_{B_i}(S)$: comme on sait que B a tiré le numéro i, il faut que A tire un numéro compris, si possible, entre $2i$ et n. Pour que cela soit possible, il faut déjà que : $2i \leq n \Leftrightarrow i \leq \frac{n}{2}$. On voit donc ici que l'on doit étudier deux cas selon que n pair ou impair.

- Si n pair, on obtient par Chasles que

$$P(S) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} P_{B_i}(S) + 0$$

car si $i > \dfrac{n}{2}$ alors $P_{B_i}(S) = 0$. Puis pour tout $i \in [\![1, \frac{n}{2}]\!]$: $P_{B_i}(S) = \dfrac{2(n-2i+1)}{2n} = \dfrac{n-2i+1}{n}$ car il y a $n-2i+1$ numéros possibles et pour chacun de ces numéros, il y a deux boules. Ainsi on obtient que :

$$P(S) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(n-2i+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{n+2}{4n}.$$

- Si n impair, on obtient par Chasles :

$$P(S) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} P_{B_i}(S) + 0$$

car si $i > \dfrac{n-1}{2}$ alors $P_{B_i}(S) = 0$. Puis pour tout $i \in [\![1, \dfrac{n-1}{2}]\!]$: $P_{B_i}(S) = \dfrac{2(n-2i+1)}{2n} = \dfrac{n-2i+1}{n}$ car il y a $n-2i+1$ numéros possibles et pour chacun de ces numéros, il y a deux boules. Ainsi on obtient que :

$$\boxed{P(S) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-2i+1) = \frac{n-1}{2n} + \frac{n-1}{2n^2} - \frac{(n-1)(n+1)}{4n^2}}.$$

Correction 16.

1. On utilise pour cela le sce (A_n, B_n) et on obtient d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) \quad \text{et} \quad P(B_{n+1}) = P(B_{n+1} \cap A_n) + P(B_{n+1} \cap B_n).$$

D'après le protocole, $P(A_n) \neq 0$ et $P(B_n) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles P_{A_n} et P_{B_n} existent bien. On peut donc alors appliquer la formule des probabilités composées et on obtient que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) = pa_n + (1-p)b_n \\ b_{n+1} &= P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) = (1-p)a_n + pb_n. \end{aligned}$$

2. Comme (A_n, B_n) est un sce, on a bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n + b_n = 1$.
Ainsi on obtient que :

$$a_{n+1} = (2p-1)a_n + 1 - p \quad \text{et} \quad b_{n+1} = (2p-1)b_n + 1 - p.$$

Dans les deux cas, on reconnaît une suite arithmético-géométrique et les calculs sur ce type de suite donnent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \boxed{a_n = \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{b_n = -\frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2}}$$

en utilisant le fait que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

3. Comme $p \in]0,1[$, alors $2p-1 \in]0,1[$ et ainsi on a : $-1 < 2p-1 < 1$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(2p-1)^n = 0$. Donc par somme de limite, on obtient que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty} b_n}.$$

Correction 17.

On pose S_n l'évènement « ne pas fumer le n-ième jour » et F_n l'évènement « fumer le n-ième jour » et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = P(S_n)$.

- Comme le fait de fumer ou de ne pas fumer un jour donné dépend de ce qui s'est passé le jour précédent, on commence par trouver une relation de récurrence entre $P(S_{n+1})$ et $P(S_n)$. Comme (S_n, F_n) est un sce on a, en utilisant la formule des probabilités totales que :
$$P(S_{n+1}) = P(S_{n+1} \cap S_n) + P(S_{n+1} \cap F_n).$$
De plus comme $P(S_n) \neq 0$ et $P(F_n) \neq 0$ d'après le protocole, les probabilités conditionnelles P_{S_n} et P_{F_n} existent bien. Ainsi on obtient d'après la formule des probabilités composées que :
$$P(S_{n+1}) = P(S_n)P_{S_n}(S_{n+1}) + P(F_n)P_{F_n}(S_{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1} = 0.3u_n + 0.9(1-u_n) = -0.6u_n + 0.9.$$
- On reconnaît une suite arithmético-géométrique et les calculs usuels donnent :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{7}{16}(-0.6)^n + \frac{9}{16}$$
en utilisant le fait que $u_0 = 1$.
- Comme : $-1 < -0.6 < 1$, on a que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{9}{16}$ par propriétés sur le produit et la somme de limites. Ainsi lorsque n est grand, il y a un tout petit peu plus d'une chance sur deux que le fumeur réussisse à ne pas fumer.

Correction 18.

- Notations : pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note R_i l'événement « tirer une boule rouge au tirage i » et N_i l'événement « tirer une boule noire au tirage i ». On a ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n = P(R_n)$. On note aussi pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note A_i l'événement « tirer dans l'urne A au tirage i » et B_i l'événement « tirer dans l'urne B au tirage i ».
- Calcul de $p_1 = P(R_1)$. Comme (A_1, B_1) est un sce, on obtient d'après la formule des probabilités totales que : $P(R_1) = P(R_1 \cap A_1) + P(R_1 \cap B_1)$. De plus d'après le protocole, on a : $P(A_1) = p \in]0,1[$. Ainsi on a : $P(A_1) \neq 0$ et $P(B_1) = 1 - P(A_1) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles P_{A_1} et P_{B_1} existent bien. On peut alors utiliser la version 2 de la formule des probabilités totales et on obtient que : $P(R_1) = P_{A_1}(R_1)P(A_1) + P_{B_1}(R_1)P(B_1)$. Ainsi on obtient : $P(R_1) = \dfrac{p}{3} + \dfrac{3}{4}(1-p)$ car on utilise la probabilité uniforme pour les tirages dans les urnes, les tirages se faisant au hasard. On a : $p_1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{12}p$.
- On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on cherche une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}. (R_n, N_n) est un sce donc d'après la formule des probabilités totales, on obtient que : $P(R_{n+1}) = P(R_{n+1} \cap R_n) + P(R_{n+1} \cap N_n)$. On a : $P(R_n) \neq 0$ et $P(N_n) = 1 - P(R_n) \neq 0$ d'après le protocole. Ainsi les probabilités conditionnelles P_{R_n} et P_{N_n} existent bien et on peut utiliser la formule des probabilités totales. On obtient que : $P(R_{n+1}) = P_{R_n}(R_{n+1})P(R_n) + P_{N_n}(R_{n+1})P(N_n)$. Or on a : $P(R_n) = p_n$, $P(N_n) = 1 - p_n$. De plus d'après le protocole, on obtient que : $P_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$ car le tirage se fait alors dans l'urne A et $P_{N_n}(R_{n+1}) = \dfrac{3}{4}$ car le tirage se fait alors dans l'urne B. Ainsi, on obtient la relation : $p_{n+1} = \dfrac{-5}{12}p_n + \dfrac{3}{4}$.
- On reconnaît alors une suite arithmético-géométrique. Je ne donne que le résultat, je vous laisse faire les calculs. On obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $p_n = \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{9}{17} - \dfrac{5}{12}p\right)\left(\dfrac{-5}{12}\right)^n + \dfrac{9}{17}$. Comme $-1 < \dfrac{-5}{12} < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-5}{12}\right)^n = 0$. Puis par propriété sur les produit et somme de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{9}{17}$.

Correction 19.

1. On pose pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ S_k l'évènement « choisir le sac S_k ». Comme $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n)$ est un sce, on sait que : $\sum_{k=1}^{n} P(S_k) = 1$. Or on sait que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $P(S_k) = \alpha k$. Ainsi le calcul de la somme donne

$$\sum_{k=1}^{n} P(S_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} k = \alpha \times \frac{n(n+1)}{2}.$$

On obtient donc que : $\alpha \times \frac{n(n+1)}{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{n(n+1)}$.

2. On note B l'évènement « tirer un jeton blanc ». Pour calculer $P(B)$, on doit savoir dans quel sac on se trouve. On utilise ainsi le fait que $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n)$ est un sce et on obtient donc d'après la formule des probabilités totales que

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap S_k) = P(B \cap S_1) + P(B \cap S_2) + \cdots + P(B \cap S_n).$$

On sait que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $P(S_k) = \frac{2k}{n(n+1)}$ donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $P(S_k) \neq 0$ et ainsi la probabilité conditionnelle P_{S_k} existe pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On peut donc appliquer la formule des probabilités composées et on obtient que

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(S_k) P_{S_k}(B) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k \times P_{S_k}(B).$$

Mais on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $P_{S_k}(B) = \frac{k}{n+1}$. Ainsi on obtient que

$$P(B) = \frac{2}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2}{n(n+1)^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3(n+1)}.$$

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ fixé. On cherche à calculer $P_B(S_k)$ qui existe bien car on vient de montrer à la question précédente que $P(B) \neq 0$ et ainsi la probabilité conditionnelle P_B existe bien. De plus on remarque qu'il y a inversion de chronologie et on utilise donc la formule de Bayes. On obtient alors

$$P_B(S_k) = \frac{P_{S_k}(B) P(S_k)}{P(B)}.$$

Et on sait que $P(S_k) \neq 0$ car $P(S_k) = \frac{2k}{n(n+1)}$ donc la probabilité conditionnelle P_{S_k} existe bien. Comme $P_{S_k}(B) = \frac{k}{n+1}$, on obtient au final que

$$P_B(S_k) = \frac{6k^2}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Correction 20.

1.
   - Notations : on note A l'événement « accepter une pièce », B l'événement « la pièce est bonne »et T l'événement « il y a une erreur de contrôle ».
   - Reprise des données de l'exercice :
     - ⋆ $P(\overline{B}) = 0.05 \neq 0$ et ainsi $P_{\overline{B}}$ existe bien.
     - ⋆ $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0.95 \neq 0$ et ainsi P_B existe bien.
     - ⋆ $P_B(A) = 0.96$ car P_B existe bien. De plus, comme P_B est une probabilité, on a donc : $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A) = 0.04$.
     - ⋆ $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 0.98$ car $P_{\overline{B}}$ existe bien. De plus, comme $P_{\overline{B}}$ est une probabilité, on a donc : $P_{\overline{B}}(A) = 1 - P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 0.02$.

- Calcul de $P(T)$:
On a : $T = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Or les événements $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles et ainsi on obtient que : $P(T) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$. Puis comme les probabilités conditionnelles P_B et $P_{\overline{B}}$ existent bien, on obtient que : $P(T) = P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B}) + P_B(\overline{A})P(B) = 0.02 \times 0.05 + 0.04 \times 0.95$. Ainsi $P(T) = 0.039$.

2. On remarque qu'il y a ici une inversion de chronologie, on va donc utiliser la formule de Bayes. Ainsi sous réserve que les deux probabilités conditionnelles P_A et $P_{\overline{B}}$ existent bien, on a : $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})}{P(A)}$.
   - On sait que $P(\overline{B}) = 0.05 \neq 0$ et ainsi $P_{\overline{B}}$ existe bien.
   - Calculons $P(A)$ et vérifions que $P(A) \neq 0$:
   Comme presque toujours avec la formule de Bayes, le dénominateur se calcule en utilisant la formule des probabilités totales. On a en effet ici que $(B, \overline{B})$ est un sce et ainsi d'après la formule des probabilités totales, on obtient que : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$. Mais on a déjà montré que P_B et $P_{\overline{B}}$ existent bien et ainsi on obtient avec la version 2 de la formule des probabilités totales : $P(A) = P_B(A)P(B) + P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})$. D'après ce que l'on a déjà calculé, on obtient que : $P(A) = 0.96 \times 0.95 + 0.02 \times 0.05 = 0.913$. Ainsi $P(A) \neq 0$ et P_A existe bien.

   Ainsi les deux hypothèses de la formule de Bayes sont bien vérifiées et on obtient donc : $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})}{P(A)} = \dfrac{0.02 \times 0.05}{0.913} = \dfrac{1}{913}$.
3. On remarque qu'il y a ici une inversion de chronologie, on va donc utiliser la formule de Bayes. Ainsi sous réserve que les deux probabilités conditionnelles P_B et $P_{\overline{A}}$ existent bien, on a : $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{P_B(\overline{A})P(B)}{P(\overline{A})}$.
   - On sait que $P(B) = 0.95 \neq 0$ et ainsi P_B existe bien.
   - Calculons $P(\overline{A})$ et vérifions que $P(\overline{A}) \neq 0$:
   Ici il n'y a pas besoin d'utiliser la formule des probabilités totales car on connaît $P(A)$. Ainsi on a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.087$. Ainsi $P(\overline{A}) \neq 0$ et $P_{\overline{A}}$ existe bien.

   Ainsi les deux hypothèses de la formule de Bayes sont bien vérifiées et on obtient donc : $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{P_B(\overline{A})P(B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0.04 \times 0.95}{0.087} = \dfrac{38}{87}$.

Correction 21.

- Notations : on note T l'événement « être tricheur » et A l'événement « l'individu retourne un as ».
- $(T, \overline{T})$ est un sce, ainsi d'après la formule des probabilités totales, on obtient que : $P(A) = P(A \cap T) + P(A \cap \overline{T})$.
- D'après l'énoncé, on sait que $P(T) = p \in]0, 1[$. Ainsi $P(T) \neq 0$ et $P(\overline{T}) \neq 0$ et donc ainsi les probabilités conditionnelles P_T et $P_{\overline{T}}$ existent bien. On peut donc utiliser la formule des probabilités totales et on obtient que : $P(A) = P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P(\overline{T})$.
- D'après l'énoncé, on a : $P(T) = p$ et ainsi $P(\overline{T}) = 1 - p$. De plus toujours d'après l'énoncé, on sait aussi que : $P_T(A) = 1$. De plus les cartes sont bien mélangées et ainsi on peut utiliser la probabilité uniforme et on obtient donc que $P_{\overline{T}}(A) = \dfrac{4}{52}$.
- Au final, on obtient donc que : $\boxed{P(A) = \dfrac{48}{52}p + \dfrac{4}{52} = \dfrac{12}{13}p + \dfrac{1}{13}}$.

Correction 22.

- Notations : on note V l'événement « être vacciné », M l'événement « être malade ».
- Traduction des données de l'énoncé :

- $\star$ $P(V) = \dfrac{1}{4} \neq 0$ et ainsi P_V existe bien.
- $\star$ $P(\overline{V}) = 1 - P(V) = \dfrac{3}{4} \neq 0$ et ainsi $P_{\overline{V}}$ existe bien.
- $\star$ $P_M(V) = \dfrac{1}{5}$. De plus, comme P_M est une probabilité, on a donc : $P_M(\overline{V}) = 1 - P_M(V) = \dfrac{4}{5}$.
- $\star$ $P_V(M) = \dfrac{1}{12}$ car P_V existe bien. De plus, comme P_V est une probabilité, on a donc : $P_V(\overline{M}) = 1 - P_V(M) = \dfrac{11}{12}$.

- Calcul de $P_{\overline{V}}(M)$: on a inversion de chronologie, donc on utilise la formule de Bayes, car $P(M)$ et $P(\overline{V})$ sont non nuls : $P_{\overline{V}}(M) = \dfrac{P_M(\overline{V})P(M)}{P(\overline{V})}$.
  De plus, pour calculer $P(M)$, on peut utiliser à nouveau la formule de Bayes : $P_V(M) = \dfrac{P_M(V)P(M)}{P(V)}$, sous réserve que les probabilités conditionnelles existent. On sait que : $P_M(V) = \dfrac{1}{5}$ et que $P_V(M) = \dfrac{1}{12}$. On en déduit que $P(M) = \dfrac{P_V(M)P(V)}{P_M(V)} = \dfrac{5}{48}$.
  Ainsi, on obtient que : $P_{\overline{V}}(M) = \dfrac{16}{15} \times \dfrac{5}{48} = \dfrac{1}{9}$. Donc il y a 1 chance sur 9 qu'un non vacciné tombe malade.
- On a $P_V(M) < P_{\overline{V}}(M)$, donc le vaccin est efficace.

Correction 23.

- Notations : on note D l'événement « tirer une dame », $J1$ l'événement « tirer une carte du jeu de 32 cartes » et $J2$ l'événement « tirer une carte du jeu de 52 cartes ».
- Calcul de $P_D(J1)$ sous réserve que la probabilité conditionnelle P_D existe bien :
  On remarque une inversion de chronologie, on va donc utiliser la formule de Bayes. Ainsi sous réserve que les probabilités conditionnelles P_{J1} et P_D existent bien, on obtient que : $P_D(J1) = \dfrac{P_{J1}(D)P(J1)}{P(D)}$.
  - $\star$ Calcul de $P(J1)$: comme on choisit l'un des deux jeux au hasard, on utilise la probabilité conditionnelle et on obtient que : $P(J1) = \dfrac{1}{2}$. En particulier P_{J1} existe bien car $P(J1) \neq 0$.
  - $\star$ Calcul de $P(D)$:
    Comme le plus souvent avec la formule de Bayes, le dénominateur se calcule en utilisant un sce et la formule des probabilités totales. Ainsi ici, on a $(J1, J2)$ est un sce et ainsi d'après la formule des probabilités totales, on obtient que $P(D) = P(D \cap J1) + P(D \cap J2)$. De plus, on a : $P(J1) = P(J2) = \dfrac{1}{2}$ car on choisit au hasard le jeu de carte utilisé. Ainsi on obtient en particulier que $P(J1) \neq 0$ et $P(J2) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles P_{J1} et P_{J2} existent bien. On peut donc utiliser la version 2 de la formule des probabilités totales et on obtient que : $P(D) = P_{J1}(D)P(J1) + P_{J2}(D)P(J2)$. Comme les cartes sont bien mélangées et que l'on tire une carte au hasard, on utilise la probabilité uniforme et ainsi on obtient que : $P_{J1}(D) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ et $P_{J2}(D) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$. On a ainsi : $P(D) = \dfrac{91}{208}$.
    En particulier $P(D) \neq 0$ et ainsi la probabilité conditionnelle P_D existe bien.

  On peut donc bien appliquer la formule de Bayes et on obtient que : $P_D(J1) = \dfrac{13}{91}$.

Correction 24.

On note A l'évènement « provenir de l'usine A », B l'évènement « provenir de l'usine B »et D l'évènement « posséder un défaut ». L'énoncé nous indique que : $P(A) = \dfrac{7}{10}$, $P(B) = \dfrac{3}{10}$. En particulier on a : $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles P_A et P_B existent bien. Puis l'énoncé nous dit aussi que : $P_A(D) = \dfrac{2}{10}$ et $P_B(D) = \dfrac{1}{10}$.

On cherche alors à calculer $P_D(B)$. Comme on remarque une inversion de chronologie, on va utiliser la formule de Bayes. On obtient donc sous réserve d'existence des probabilités conditionnelles que

$$P_D(B) = \frac{P_B(D)P(B)}{P(D)}.$$

On commence par calculer $P(D)$:
Comme (A, B) est un sce, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B).$$

Puis comme les probabilités conditionnelles P_A et P_B existent bien on obtient d'après la formule des probabilités composées que :

$$P(D) = P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D) = \frac{17}{100}.$$

En particulier $P(D) \neq 0$ et la probabilité conditionnelle P_D existe bien.

On connaît alors toutes les probabilités et on obtient donc que : $\boxed{P_D(B) = \frac{3}{14}}$.

Correction 25.

- Notations : on note A, B, C et D les événements « l'élève emprunte l'itinéraire A, B, C ou D ». On note de plus R l'événement « arriver en retard ».
- Traduction des données de l'exercice :
  - ⋆ On a $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{1}{4}$ et $P(C) = \frac{1}{12}$.
    De plus, comme (A, B, C, D) est un sce, on sait que : $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$ et ainsi, on obtient que : $P(D) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) = \frac{1}{3}$.
  - ⋆ $P_A(R) = \frac{1}{20}$, $P_B(R) = \frac{1}{10}$, $P_C(R) = \frac{1}{5}$ et $P_D(R) = 0$ car P_A, P_B, P_C et P_D existent bien car on vient de voir que $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, $P(C) \neq 0$, $P(D) \neq 0$.
- On cherche à calculer $P_R(C)$ sous réserve d'existence de la probabilité conditionnelle P_R. Comme on remarque une inversion de chronologie, on utilise la formule de Bayes. Ainsi sous réserve que les probabilités conditionnelles P_R et P_C existent bien, on a : $P_R(C) = \frac{P_C(R)P(C)}{P(R)}$.
  - D'après les données de l'exercice, on sait que $P(C) = \frac{1}{12} \neq 0$ et ainsi P_C existe bien.
  - Calcul de $P(R)$: comme (A, B, C, D) est un sce, on a d'après la formule des probabilités totales que : $P(R) = P(R \cap A) + P(R \cap B) + P(R \cap C) + P(R \cap D)$. Mais on a déjà vu que $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, $P(C) \neq 0$ et $P(D) \neq 0$, ainsi les probabilités conditionnelles P_A, P_B, P_C et P_D existent bien et on peut alors appliquer la version 2 de la formule des probabilités totales. Ainsi on a : $P(R) = P_A(R)P(A) + P_B(R)P(B) + P_C(R)P(C) + P_D(R)P(D)$. D'après les données de l'exercice, on obtient : $P(R) = \frac{7}{12}$. En particulier $P(R) \neq 0$ et P_R existe bien.

  On peut donc bien appliquer la formule de Bayes et on obtient que : $\boxed{P_R(C) = \frac{1}{35}}$.

IV Indépendance

Correction 26.

1. Étude de l'indépendance deux à deux :
   On doit donc regarder si les événements A, B ; A, C et B, C sont indépendants. Pour cela on doit donc calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$ et $P(B \cap C)$.

- Calcul de $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$:
  On obtient que $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{2}$. Il s'agit de faire le raisonnement suivant, par exemple pour $P(C)$: on a $C = (P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2)$ avec notations évidentes. Les deux évenments $P_1 \cap F_2$ et $F_1 \cap P_2$ sont incompatibles deux à deux et ainsi on obtient que : $P(C) = P(P_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap P_2)$. Puis les événements P_1, F_2 et F_1, P_2 sont mutuellement indépendants car on répète deux fois de suite la même expérience dans les mêmes conditions. Ainsi on obtient que : $P(C) = P(P_1)P(F_2) + P(F_1)P(P_2) = \dfrac{1}{2}$ car la pièce n'est pas truquée et on utilise donc la probabilité uniforme.
- ⋆ $P(A \cap B) = P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)P(P_2) = \dfrac{1}{4}$ en utilisant le fait que les événements P_1 et P_2 sont mutuellement indépendants.
  ⋆ $P(A \cap C) = P(P_1 \cap F_2) = P(P_1)P(F_2) = \dfrac{1}{4}$ en utilisant le fait que les événements P_1 et F_2 sont mutuellement indépendants.
  ⋆ $P(B \cap C) = P(F_1 \cap P_2) = P(F_1)P(P_2) = \dfrac{1}{4}$ en utilisant le fait que les événements F_1 et P_2 sont mutuellement indépendants.
- On remarque ainsi que l'on a bien : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ et $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ et ainsi les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.

2. Étude de l'indépendance mutuelle :
   Pour étudier l'indépendance mutuelle, il faut que les événements sont déjà deux à deux indépendants et en plus ils doivent vérifier : $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$. Or ici, on a : $A \cap B \cap C = \emptyset$ et ainsi $P(A \cap B \cap C) = 0$. Ainsi $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$ et les trois événements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Correction 27.

A et B jouent donc 32 échanges au ping-pong et sur ces 32 échanges, A en gagnent 21. Il faut dénombrer le nombre de façons de gagner 21 échanges sur 32. Il y a donc $\dbinom{32}{21}$ façons différentes de gagner 21 échanges sur 32. On a ainsi placé les échanges où A gagne et les échanges où A perd. Ensuite il faut donc calculer la probabilité des événements de type : $G_1G_2P_3G_4G_5P_6P_7P_8 \dots G_{32}$ si on note G_i l'événement « A gagne à l'échange i » et P_i l'événement « A perd à l'échange i ». Comme les échanges sont mutuellement indépendants, on obtient que la probabilité des événements de ce type est : $r^{21}(1-r)^{11}$. Ainsi au final, on obtient que : $\boxed{P(S) = \dbinom{32}{21} r^{21}(1-r)^{11}}$ si on note S l'événement « A gagne 21-11 ».

Correction 28.

On note A l'événement « la longueur est refusée », B : « la largeur est refusée » et C : « la hauteur est refusée ». On doit calculer $P(A \cup B \cup C)$. Attention, ces trois événements ne sont pas incompatibles ! On doit donc utiliser la formule :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Or les événements A, B et C sont mutuellement indépendants, donc on a :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A) \times P(B) - P(A) \times P(C) - P(B) \times P(C) + P(A) \times P(B) \times P(C).$$

L'application numérique donne que la probabilité de rejet est d'environ 0.17.

Correction 29.

1. On note A et B les événements « la pièce est fabriquée par A, par B » et D l'événement « la pièce prélevée est défectueuse ». Comme (A, B) forme un sce et que $P(A) = 0.75 \neq 0$ et $P(B) = 0.25 \neq 0$, on peut appliquer la formule des probabilités totales :
   $$P(D) = P_A(D) \times P(A) + P_B(D) \times P(B).$$
   D'après les données de l'exercice, on obtient $\boxed{P(D) = 0.0475}$.

2. Soit C l'événement : « trouver au moins deux pièces défectueuses ». On passe ici à l'événement contraire : $\overline{C}$: « Trouver 0 ou 1 pièce défectueuse ».
   Notons E : « Trouver 0 pièce défectueuse » et F : « Trouver 1 pièce défectueuse ». On a $\overline{C} = E \cup F$. De plus, E et F sont incompatibles, donc $P(\overline{C}) = P(E) + P(F)$.
   Calculons $P(E)$. Pour cela, on note D_i : « la i-ème pièce est défectueuse ». On a : $E = \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \cap \ldots \cap \overline{D}_{10}$. Or les événements D_i sont mutuellement inépendants, donc on a : $P(E) = P(\overline{D}_1) \times \ldots \times P(\overline{D}_{10})$. D'après la question 1. on a donc $P(E) = (1 - 0.0475)^{10}$.
   Calculons à présent $P(F)$. Il faut d'abord compter le nombre de possibilités pour le numéro de la pièce défectueuse : cela peut être la première examinée, ou bien la deuxième, ..., ou la dernière : on a donc 10 possibilités. Dans chaque cas, la probabilité vaut $P(D_1 \cap \overline{D}_2 \cap \ldots \cap \overline{D}_{10})$. Comme dans le cas précédent, les événements sont mutuellement indépendants, donc on obtient : $P(F) = 10 \times 0.0475 \times (1 - 0.0475)^9$.
   Finalement, $P(C) = 1 - (P(E) + P(F))$, et l'application numérique donne $\boxed{P(C) \simeq 0.079}$.