DM 15

Exercice 1 (Formule de Leibniz)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(I)$. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-iéme de f.

Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(I)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

(La preuve se fait par récurrence et suit les mêmes étapes que la preuve du binôme de Newton)

Exercice 2. Déduire de l'exercice précédent la dérivée $n$éme de $f(x) = x^n \ln(x)$

Exercice 3. Soit $P_n(X) = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$ la dérivée n-éme de P_n.

1. Calculer le degré de L_n.
2. A l'aide de la formule de Leibniz, calculer $L_n(1)$.