Programme de colle : Semaine 25
Lundi 18 Avril

I Dérivation

1. Définition de la dérivation et taux d'accroissement.
2. Dérivée d'une composé, dérivée d'une bijection réciproque.
3. Théorème de Rolle.
4. Théorème des accroissements finis (L'inégalité des accroissement finis n'est pas au programme (!) et doit être redémontrée par les étudiants)

II Espace vectorielle

1. Reconnaitre un sev de $\mathbb{R}^n$.
2. Notion de combinaisons linéaires de vecteurs.
3. Ecriture cartésienne et vectorielle d'un sev de $\mathbb{R}^n$.
4. Famille libre, famille génératrice, base.
5. Dimension
6. rang d'une famille de vecteurs.

III Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Manipulation des listes.
2. Recherche de maximum d'une liste.
3. Tri à bulle et tri par insertion.
4. Bibliothèque matplotlib.pyplot et numpy.
5. Tracer de fonction.
6. Somme de Riemann, calcul de limites et approximations des intégrales.
7. Modéliser une expérience aléatoire à l'aide de la bibliothéque random.

IV Exercices Types

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
   — $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x - y = 0\right\}$
   — $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x - 3y + 1 = 0\right\}$
   — $C = \left\{(x + 2y, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
   — $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\right\}$
2. Trouver une famille génératrice des deux sous-espaces vectoriels suivants

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y - 2t = 0 \quad \text{et} \quad x + t = 0\right\}$$

$$G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - z + t = 0 \quad \text{et} \quad y + z = 0\right\}.$$

   Trouver une famille génératrice de $F \cap G$.
3. Donner l'écriture cartésienne des espaces vectoriels suivants.
   — $E = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 2, 2)$ et $v = (2, 1, 3)$.

— $E = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 4, 1, 1)$ et $v = (-1, 2, 2, 1)$.
— $E = \left\{(2a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a),\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$

4. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.
   — $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, 1, -1)$ et $w = (1, 5, -1)$
   — $u = (1, 1, 2)$, $v = (2, 1, 0)$ et $w = (3, 1, \lambda)$ λ paramètre réel.
   — $u = (1, 0, -2)$, $v = (2, 3, 1)$ et $w = (4, -2, 1)$
   — $u = (1, 1, -1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (-1, 1, 1)$ et $t = (1, 1, 1)$
5. Montrer que si f, dérivable n fois sur $[a, b]$ et admet $n+1$ zéros sur $]a, b[$ alors il existe $c \in\,]a, b[$ tel que : $f^{(n)}(c) = 0$.
6. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{12 + v_n} \end{cases}$
   (a) Montrer que la suite est bien définie, minorée par 0 et strictement majorée par 4.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|v_{n+1} - 4| < \dfrac{1}{4}|v_n - 4|$
   (c) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
7. Modéliser le lancer d'un dé. De 100 lancers de dé. De lancers de dés jusqu'à obtenir un 6...
8. Modéliser le tirage d'une boule dans une urne contenant 3 rouges et 5 noires.
9. Ecrire une fonction qui prend en argument une liste et la trie.
10. Ecrire une fonction qui prend en argument une liste et une variable `a` et retourne le nombre de fois où `a` appartient à la liste.
11. Tracer la fonction $f(x) = x^3 + 3x + 1$ entre -1 et 1 à l'aide de la bibliothéque matplotlib.pyplot.
    Calculer les DL suivants en 0