Programme de colle : Semaine 27
Lundi 16 mai

I Espace vectoriel

1. Reconnaitre un sev de $\mathbb{R}^n$.
2. Notion de combinaisons linéaires de vecteurs.
3. Ecriture cartésienne et vectorielle d'un sev de $\mathbb{R}^n$.
4. Famille libre, famille génératrice, base.
5. Dimension
6. Rang d'une famille de vecteurs.

II Variable aléatoire réelle finie

1. Définition d'une VAR finie.
2. Loi et fonction de répartition.
3. Espérance, variance, formule de Koenig-Huygens.

III Dérivation

1. Théorème des accroissements finis et théorème de Rolle.

IV Informatiques

Les programmes seront écrit en Python.

1. Manipulation des listes.
2. Recherche de maximum d'une liste.
3. Tri à bulle et tri par insertion.
4. Bibliothèque matplotlib.pyplot et numpy.
5. Tracer de fonction.
6. Somme de Riemann, calcul de limites et approximations des intégrales.
7. Modéliser une expérience aléatoire à l'aide de la bibliothéque random.

V Exercices Types

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
   — $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x - y = 0\right\}$
   — $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x - 3y + 1 = 0\right\}$
   — $C = \left\{(x+2y, y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
   — $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\right\}$
2. Trouver une famille génératrice des deux sous-espaces vectoriels suivants

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - y - 2t = 0 \quad \text{et} \quad x + t = 0\right\}$$

$$G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad x - z + t = 0 \quad \text{et} \quad y + z = 0\right\}.$$

   Trouver une famille génératrice de $F \cap G$.

3. Donner l'écriture cartésienne des espaces vectoriels suivants.
   — $E = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 2, 2)$ et $v = (2, 1, 3)$.
   — $E = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 4, 1, 1)$ et $v = (-1, 2, 2, 1)$.
   — $E = \left\{(2a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a),\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$
4. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ? Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.
   — $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, 1, -1)$ et $w = (1, 5, -1)$
   — $u = (1, 1, 2)$, $v = (2, 1, 0)$ et $w = (3, 1, \lambda)$ λ paramètre réel.
   — $u = (1, 0, -2)$, $v = (2, 3, 1)$ et $w = (4, -2, 1)$
   — $u = (1, 1, -1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (-1, 1, 1)$ et $t = (1, 1, 1)$
5. Un joueur prélève successivement et avec remise n boules dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On considère les varf X et Y égales respectivement au plus grand et au plus petit numéro des n boules tirées. Donner les univers images de X et de Y. Calculer la fonction de répartition de X. En déduire la loi de X. Calculer ensuite pour tout $k \in Y(\Omega)$: $P([Y > k])$. En déduire la loi de Y.
6. On lance deux dés équilibrés distincts à 6 faces. On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit.
   (a) Déterminer les lois et les fonctions de répartition de X et de Y.
   (b) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ et comparer ces espérances.
   (c) Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.
7. Deux joueurs jouent n fois chacun à pile ou face.
   (a) Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de piles.
   (b) Calculer la probabilité pour qu'un joueur obtienne un nombre de piles strictement plus grand que l'autre.