DS 9

Durée 3h00

- Les calculatrices sont <u>interdites</u> durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

A - Étude du cas $c = 0$.

Dans cette partie et dans cette partie seulement, on suppose que $c = 0$. C'est-à-dire que l'on effectue ici n tirages avec remise.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ième} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. (a) Soit N_i l'événement : " tirer une boule blanche au tirage i ". Pour $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer l'événément $Y = k$ en fonction de $(N_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$

   (b) En déduire la pour $k \in [\![1, n]\!]$, la probabilité $P(Y = k)$

   (c) Calculer enfin $P(Y = 0)$
3. (a) Soit $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$ Rappeler la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} x^k$.

   (b) En dérivant l'expression obtenue à la question précédente, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

4. En déduire $E(Y)$.

B - Étude du cas $c \neq 0$.

On revient au cas général et on suppose donc que l'on remet à chaque tirage c boules de la couleur tirée. On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{ème} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer l'univers image de X_2 et pour tout $(x, y) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$ la valeur de $P(X_1 = x \text{ et } X_2 = y)$.
4. En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
5. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
6. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.
7. Soit $p \leqslant n - 1$.

   (a) Déterminer $P_{Z_p = k}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.

(b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}.$$

(c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
(On raisonnera par récurrence forte sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à son vecteur nul. On s'intéresse aux endomorphismes f de E vérifiant la relation

$$f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_E\,. \quad (*)$$

A- Etude d'un exemple On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (3x + 2y, -x) \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $g \circ g$ et vérifier que g est solution de $(*)$
3. Soit $F = \ker(g - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et en donner une base.
4. Faire de même avec $G = \ker(g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$.
5. Montrer que $F \cap G = \{0\}$
6. Soit $u = (1, -1)$ et $v = (-2, 1)$ Montrer que $B = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
7. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer (x, y) comme combinaison linéaire de u et v.
8. Calculer $g^n(u)$ et $g^n(v)$.
9. Donner finalement l'expression de $g^n(x, y)$ en fonction de x et y.
10. Soit A la matrice de g dans la base canonique. Donner la matrice A, puis à l'aide de la question précédente déterminer A^n en fonction de n.

B- Cas général On se place maitenant dans le cas général et on s'intéresse à l'équation $(*)$.

1. Montrer que si f vérifie $(*)$ alors f est bijective et exprimer f^{-1} comme combinaison linéaire de f et de Id_E.
2. Déterminer les solutions de $(*)$ de la forme $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On suppose dans la suite que f est une solution de $(*)$ et que f n'est pas de la forme $\lambda\,\mathrm{Id}_E$.
3. (a) Exprimer f^3 comme combinaison linéaire de Id_E et f.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, f^n peut s'écrire sous la forme $f^n = a_n f + b_n\,\mathrm{Id}_E$ avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$
4. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 0$
   (b) En déduire une expression de a_n ne faisant intervenir que n.
   (c) Calculer alors b_n.
5. Déterminer enfin f^n en fonction de f et Id.

Exercice 3 (Extrait du Concours Agro-Veto 2019)**.** Des éléments de syntaxe Python, et en particulier l'usage du module numpy, sont donnés en annexe . Dans tout ce qui suit, les variables n, p, A, M, i, j et c vérifient les conditions suivantes qui ne seront pas rappelées à chaque question :

— n et p sont des entiers naturels tels que $p \geq n \geq 2$;

— A est une matrice carrée à n lignes inversible ;

— M est une matrice à n lignes et p colonnes telle que la sous-matrice carrée constituée des n premières colonnes de M est inversible ;

— i et j sont des entiers tels que $0 \leq i \leq n-1$ et $0 \leq j \leq n-1$;

— c est un réel non nul.

On note $L_i \leftarrow L_i + cL_j$ l'opération qui ajoute à la ligne i d'une matrice la ligne j multipliée par c.

1. Soit la fonction initialisation :

```
def initialisation(A):
     n = np.shape(A)[0]
     mat = np.zeros((n,2*n))
     for i in range(0, n):
          for j in range(0, n):
               mat[i,j] = A[i,j]
     return(mat)
```

   Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant. L'appel initialisation (A) renvoie :

   (a) une matrice rectangulaire à n lignes et $2n$ colonnes remplie de zéros ;

   (b) une matrice de même taille que A ;

   (c) une erreur au niveau d'un range ;

   (d) une matrice rectangulaire telle que les n premières colonnes correspondent aux n colonnes de A, et les autres colonnes sont nulles.

2. Les trois fonctions multip, ajout et permut suivantes ne renvoient rien : elles modifient les matrices auxquelles elles s'appliquent.

   (a) Que réalise la fonction multip ?

```
def multip(M, i, c):
     p = np.shape(M)[1]
     for k in range(0, p):
          M[i,k] = c*M[i,k]
```

   (b) Compléter la fonction ajout, afin qu'elle effectue l'opération $L_i \leftarrow L_i + cL_j$.

```
def ajout(M, i, j, c):
     p = np.shape(M)[1]
     for k in range(0, p):
          _____ ligne(s) a completer _____
```

   (c) Écrire une fonction permut prenant pour argument M, i et j, et qui modifie M en échangeant les valeurs des lignes i et j.

   Dans la suite du sujet, l'expression "opération élémentaire sur les lignes" fera référence à l'utilisation de permut, multip ou ajout.

3. Soit la colonne numéro j dans la matrice M. On cherche le numéro r d'une ligne où est situé le plus grand coefficient (en valeur absolue) de cette colonne parmi les lignes j à $n-1$. Autrement dit, r vérifie :

$$|A[r, j]| = \max\{|A[i, j]| \text{ pour } i \text{ tel que } j \leq i \leq n-1\}.$$

   Écrire une fonction `rang_pivot` prenant pour argument M et j, et qui renvoie cette valeur de r.

Lorsqu'il y a plusieurs réponses possibles pour r, dire (avec justification) si l'algorithme renvoie le plus petit r, le plus grand r ou un autre choix.
(L'utilisation d'une commande max déjà programmée dans Python est bien sûr proscrite.)

4. Soit la fonction mystere :

```
def mystere(M):
    n = np.shape(M)[0]
    for j in range(0, n):
        r = rang_pivot(M, j)
        permut(M, r, j)
        for k in range(j+1, n):
            ajout(M, k, j, -M[k,j]/M[j,j])
        print(M)
```

   (a) On considère dans cette question l'algorithme mystere appliqué à la matrice

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

   Indiquer combien de fois la ligne print (M) est exécutée ainsi que les différentes valeurs qu'elle affiche

   (b) De façon générale, que réalise cet algorithme ?

5. On considère la fonction reduire :

```
def reduire(M):
    n = np.shape(M)[0]
    mystere(M)
    for i in range(0, n):
        multip(M, i, 1/M[i,i])
    #Les lignes suivantes sont \'a compl\'eter :
        ______________________________
```

Compléter la fonction afin que la portion de code manquante effectue les opérations élémentaires suivantes sur les lignes :
pour j prenant les valeurs $n-1, n-2, \dots, 1$, faire :
pour k prenant les valeurs $j-1, j-2, \dots, 0$, faire :

$$\mathrm{L_k} \leftarrow \mathrm{L_k} - \mathrm{M[k,j]L_j}$$

Indiquer ce que réalise cette fonction.

Annexe

On considère que le module numpy, permettant de manipuler des tableaux à deux dimensions, est importé via import numpy as np. Pour une matrice M à n lignes et p colonnes, les indices vont de 0 à $n-1$ pour les lignes et de 0 à $p-1$ pour les colonnes.

Python	Interprétation
abs(x)	Valeur absolue du nombre x
M[i, j]	Coefficient d'indice (i, j) de la matrice M
np· zeros ((n, p))	Matrice à n lignes et p colonnes remplie de zéros
T = np.shape(M) T[0] ou np.shape (M)[0] T[1] ou np.shape (M)[1]	Dimensions de la matrice M Nombre de lignes Nombre de colonnes
M[a : b, c : d]	Matrice extraite de M constituée des lignes a à $b-1$ et des colonnes c à $d-1$: si a (resp. c) n'est pas précisé, l'extraction commence à la première ligne (resp. colonne) si b (resp. d) n'est pas précisé, l'extraction finit à la dernière ligne (resp. colonne) incluse