DM2

Exercice 1. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.
2. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
3. (a) On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\psi^2 = \psi + 1$.
   (b) Montrer que l'expression explicite de F_n st donnée par $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

Correction 1.

1. Nous allons montrer ces propriétés par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}(n)$ la prorpriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) := \text{« } \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1 \text{ ».}$$

Montrons $\mathcal{P}(0)$. Vérifions la première égalité :

$$\sum_{k=0}^{0} F_{2k+1} = F_{0+1} = F_1 = 1$$

et

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1$$

Donc la première égalité est vraie au rang 0.
Vérifions la sedonde égalité :

$$\sum_{k=0}^{0} F_{2k} = F_0 = 0$$

et

$$F_{2*0+1} - 1 = F_1 - 1 = 0$$

Donc la seconde égalité est vraie au rang 0. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Considérons la première égalité de $\mathcal{P}(n+1)$. Son membre de gauche vaut :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} + F_{2n+3}$$

Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} &= F_{2n+2} + F_{2n+3}. \\ &= F_{2n+4}. \quad \text{d'après la définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= F_{2(n+1)+2}.\end{aligned}$$

La première égalité est donc héréditaire.
Considérons la sedonde égalité de $\mathcal{P}(n+1)$. Son membre de gauche vaut :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k} + F_{2n+2}$$

Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k} &= F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2}. \\ &= F_{2n+3} - 1. \quad \text{d'après la définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= F_{2(n+1)+1} - 1.\end{aligned}$$

La seconde égalité est donc héréditaire. Finalement la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1}$$

2. On va montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
   Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^{0} F_k^2 = F_0^2 = 0$ et $F_0 F_1 = 0$. La propriété est donc vraie au rang 0.
   Hérédité :
   Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n.
   On a $\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=0}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2$ Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$ donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 &= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\ &= F_{n+1} F_{n+2} \quad \text{par définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

   La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n+1$.
   Conclusion :
   Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}}$$

3. Le polynôme du second degrès $X^2 - X - 1$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ les racines sont donc $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. En particulier, ces nombres vérifient : $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ et $\psi^2 - \psi - 1 = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi + 1 \text{ et } \psi^2 = \psi + 1.}$$

4. Notons :$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$ On a

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^0 - \psi^0) = 0$$
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - \psi^1) = 1$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - \psi^{n+2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n(\varphi^2) - \psi^n(\psi^2)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n(\varphi + 1) - \psi^n(\psi + 1)) \quad \text{D'après la question précédente} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} + \varphi^n - \psi^{n+1} - \psi^n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \psi^n) \\
&= u_{n+1} + u_n
\end{aligned}$$

Donc u_n satisfait aussi la relation de récrurrence. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.

5. D'après la question précédente on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{F_{n+1}}{F_n} &= \varphi \frac{\varphi^n \left(1 - \frac{\psi^{n+1}}{\varphi^{n+1}}\right)}{\varphi^n \left(1 - \frac{\psi^n}{\varphi^n}\right)} \\
&= \varphi \frac{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n}
\end{aligned}$$

Remarquons que $|\varphi| > |\psi|$ en particulier $|\frac{\psi}{\varphi}| < 1$ et donc

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n+1} = 0.$$

Finalemetn

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.}$$

Exercice 2. 1. Rappeler la valeur de $R_3 = \sum_{k=0}^{n} k^3$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, développer $(k+1)^5 - k^5$.

3. A l'aide de la somme téléscopique $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^5 - k^5$ donner la valeur de $R_4 = \sum_{k=0}^{n} k^4$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$. (On pourra garder une formule développée)

Correction 2.

1. $R_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$
3. On a d'une part
$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^5 - k^5 = (n+1)^5$$
et d'autre part
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (k+1)^5 - k^5 &= \sum_{k=0}^{n} 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1\\ &= 5R_4 + 10R_3 + 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\end{aligned}$$
Donc
$$R_4 = \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - 10\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)\right)$$
On trouve à la fin des calculs
$$R_4 = \frac{n}{30}(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)$$

Exercice 3. On va prouver la formule du binome de Newton par récurrence
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

1. Vérifier que la formule du binôme est vraie pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ (et sur votre brouillon faite $n = 3$).
2. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1}.$$
3. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n-k+1}$$
4. En déduire que
$$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

5. Conclure.

Correction 3.

1. $n=0$
   On a $(a+b)^0=1$ et $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^kb^{0-k}=a^0b^0=1$
   $n=1$
   On a $(a+b)^1=a+b$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^kb^{1-k}=\binom{1}{0}a^0b^{1-0}+\binom{1}{1}a^1b^{1-1}=a+b$
   $n=2$
   On a $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}a^kb^{2-k}=\binom{2}{0}a^0b^{2-0}+\binom{2}{1}a^1b^{2-1}+\binom{2}{2}a^2b^{2-2}=b^2+2ab+b^2$
2. $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\binom{n}{n}a^{n+1}b^{n-n}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+a^{n+1}\end{aligned}$$
   On fait le changement devariable $k+1=j$ sur la somme. On obtient $j\in[\![1,n]\!]$, donc
   $$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}a^jb^{n-j+1}$$
   Comme j est un indice muet, on peut le changer en k. On a donc la formule demandée.
3. $$\begin{aligned}(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right)&=a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}+b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}\end{aligned}$$
   Maintenant on fait un changement de variable sur la première somme en posant $j=k+1$. On obtient :
   $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}=\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^jb^{n-j+1}$$
   On a donc, en se rappelant que j est muet et donc remplacable par k
   $$(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^kb^{n-k+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}$$
   On applique la relation de Chasles au dernier terme de la première somme et au premier terme de la deuxième somme. On obtient :
   $$\begin{aligned}(a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^kb^{n-k+1}+\binom{n}{n+1-1}a^{n+1}b^{n-(n+1)+1}\\&\quad+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}+\binom{n}{0}a^0b^{n+1-0}\\&=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^kb^{n-k+1}\end{aligned}$$

4. On applique la relation relation de Pascal à ce qu'on vient de trouver.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n-k+1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1}$$

Par ailleurs,

$$a^{n+1}=\binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^{n-(n+1)+1}$$

et

$$b^{n+1}=\binom{n+1}{0}a^0 b^{n-0+1}$$

Ce sont donc les deux termes qui manquent à la somme de 0 à $(n+1)$. On a ainsi

$$a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n-k+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$$

Ce qui prouve le résultat grace à la question précédente

5. On fait une récurrence. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P} :' \forall a,b \in \mathbb{R}, (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

L'initialisation a été faite à la question 1.
L'hérédité correspond à la question 4.