Correction DS 1

Exercice 1. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(2x+3) = 2\ln(x) + \ln(3)$
2. $\left|x^2+6x+5\right| \leq x+5$

Correction 1.

1. On note E l'équation : $\ln(2x+3) = 2\ln(x) + \ln(3)$
   L'ensemble de définition de (E) est $D =]0, +\infty[$ et on a

$$\begin{aligned}(E) &\Longleftrightarrow \ln(2x+3) = \ln(3x^2)\\ &\Longleftrightarrow 2x+3 = 3x^2\\ &\Longleftrightarrow 3x^2 - 2x - 3 = 0\end{aligned}$$

   Le discriminant de $3x^2 - 2x + 3$ est $\Delta = 40$, il y a donc deux racines réelles

$$r_1 = \frac{2-\sqrt{40}}{6} \quad \text{et} \quad r_1 = \frac{2+\sqrt{40}}{6}$$

   Remarquons que r_1 est négatif car $2 = \sqrt{4} < \sqrt{40}$.
   Ainsi (E) admet une unique solution

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\tfrac{1+\sqrt{10}}{3}\}}$$

2. On note E_2 l'équation $\left|x^2+6x+5\right| \leq x+5$ Le discriminant du polynome x^2+6x+5 est $\Delta = 16$, il y a donc deux racines réelles : $r_1 = -5 \quad$ et $\quad r_2 = -1$ et donc

$$x^2+6x+5 = (x+5)(x+1)$$

   On distingue donc deux cas :

   - Si $x^2+6x+5 > 0$ c'est à dire : $x \in]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[$

     On a alors
$$\begin{array}{rrl}(E_2) \Longleftrightarrow & (x+5)(x+1) & \leq x+5\\ \Longleftrightarrow & (x+5)(x+1)-(x+5) & \leq 0\\ \Longleftrightarrow & (x+5)(x+1-1) & \leq 0\\ \Longleftrightarrow & (x+5)x & \leq 0\end{array}$$

     Les solutions de cette dernière inéquation sur $\mathbb{R}$ sont $[-5, 0]$. Or $x \in]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[$, donc les solutions sont
$$\mathcal{S}_1 = [0, -1[$$

   - Si $x^2+6x+5 \leq 0$ c'est à dire : $x \in [-5, -1]$

On a alors

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff -(x+5)(x+1) \leq x+5\\ &\iff (x+5)(x+1)+(x+5) \geq 0\\ &\iff (x+5)(x+1+1) \geq 0\\ &\iff (x+5)(x+2) \geq 0\end{aligned}$$

Les solutions de cette dernière inéquation sur $\mathbb{R}$ sont $]-\infty,-5]\cup[-2,+\infty[$. Or $x \in [-5,-1]$, donc les solutions sont

$$\mathcal{S}_2 = \{-5\} \cup [-2,-1]$$

Finalement les solutions de (E_2) sont

$$\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = [0,-1[\cup\{-5\} \cup [-2,-1] = \{-5\} \cup [-2,0]}$$

Exercice 2. Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(k^2+2^k)$$

Correction 2.

$$\begin{aligned}S_1 &= \sum_{k=1}^{n-1}(k^2+2^k)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}k^2 + \sum_{k=1}^{n-1}2^k\\ &= \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} + \sum_{k=0}^{n-1}2^k - 2^0\\ &= \frac{(n-1)n(2n-2+1)}{6} + \frac{1-2^n}{1-2} - 1\\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - 2 - 2^n\end{aligned}$$

$$\boxed{S_1 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - 2 - 2^n}$$

Exercice 3.

1. Resoudre l'inéquation suivante :

$$\sqrt{2x^2-2} \leq x \quad (E_1)$$

2. A l'aide d'un changement de variable, en déduire les solutions de l'inéquation suivante :

$$\sqrt{2e^{2x}-2} \leq e^x \quad (E_2)$$

Correction 3.

1. L'ensemble de définition de (E_1) est $D =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. On distingue deux cas :

- Si $x \geq 0$ c'est-à-dire $x \in [0, \infty[$. Comme $x \in D$ on se restreint à $x \in [1, \infty[$

$$\begin{aligned}(E_1) &\Longleftrightarrow 2x^2 - 2 \leq x^2 \\ &\Longleftrightarrow x^2 - 2 \leq 0\end{aligned}$$

  Dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Ainsi les solutions sur $[1, \infty[$ sont

$$\mathcal{S}_1 = [1, \sqrt{2}]$$

- Si $x < 0$ c'est-à-dire $x \in]-\infty, 0[$. Comme $x \in D$ on se restreint à $x \in]-\infty, -1]$
  Dans ce cas, il n'y a pas de solution car pour tout $x \in D$ $\sqrt{2x^2 - 2} \geq 0$

$$\mathcal{S}_1' = \emptyset$$

  Finalement les solutions de (E_1) sont

$$\boxed{\mathcal{S} = [1, \sqrt{2}]}$$

2. Posons $X = e^x$ l'équation (E_2) devient alors

$$\sqrt{2X^2 - 2} \leq X$$

   Ainsi x est solution de (E_2) si et seulement si X est solution de (E_1)
   Les solutions de (E_2) sont donc

$$\mathcal{S}_2 = \{x\, e^x \in \mathcal{S}\} = \{x\, e^x \in [1, \sqrt{2}]\} = \{x\, x \in [\ln(1), \ln(\sqrt{2})]\}$$

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = [0, \tfrac{1}{2}\ln(2)]}$$

Exercice 4. On considère l'inéquation (E_a) de paramètre $a \in \mathbb{R}$ suivante :

$$\frac{2x + a}{x - 4a} \leq \frac{x}{x - 2a} \qquad (E_a)$$

1. Donner l'ensemble des solutions pour $a = 0$

   Pour la suite on supppose que $a \neq 0$.
2. Donner le domaine de définition de (E_a) en fonction de a.
3. Résoudre pour $a > 0$ l'inéquation : $(x - 4a)(x - 2a) \geq 0$.
4. Résoudre pour $a > 0$ l'inéquation : $x^2 + ax - 2a^2 \geq 0$.
5. En déduire pour $a > 0$ les solutions de (E_a).

Correction 4.

1. Pour $a = 0$, l'équation devient (E_0) : $\frac{2x}{x} \leq \frac{x}{x}$ C'est-à-dire

$$2 \leq 1$$

   .

$$\boxed{(E_0) \text{ n'admet pas de solution.}}$$

2. L'équation est bien définie pour tout $x - 4a \neq 0$ et $x - 2a \neq 0$.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } (E_a) \text{ est } \mathbb{R} \setminus \{2a, 4a\}}$$

3. Remarquons que pour $a > 0$, $4a > 2a$, les solutions de $(x-4a)(x-2a) \geq 0$ sont donc

$$\boxed{S_1 =]-\infty, 2a[\cup]4a, +\infty[}$$

4. Regardons le discriminant de $x^2 + ax - 2a^2$. On obtient $\Delta = a^2 + 4a^2 = 9a^2$. Ainsi il y a deux racines réelles distinctes (rappelons que $a \neq 0$)

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{9a^2}}{2} = a \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-a - \sqrt{9a^2}}{2} = -2a$$

On a donc

$$x^2 + ax - 2a^2 = (x-a)(x+2a)$$

(Remarquons par ailleurs que cette égalité est aussi vraie pour $a < 0$, ceci nous sera utile pour la question 6) Les solutions de $x^2 + ax - 2a^2 \geq 0$ sont donc

$$\boxed{]-\infty, -2a[\cup]a, +\infty[}$$

5.

$$\begin{aligned}
(E_a) &\iff \frac{2x+a}{x-4a} - \frac{x}{x-2a} \leq 0 \\
&\iff \frac{(2x+a)(x-2a) - (x-4a)x}{(x-4a)(x-2a)} \leq 0 \\
&\iff \frac{(2-1)x^2 + (-4a+a+4a)x - 2a^2)}{(x-4a)(x-2a)} \leq 0 \\
&\iff \frac{x^2 + ax - 2a^2}{(x-4a)(x-2a)} \leq 0 \\
&\iff \frac{x^2 + ax - 2a^2}{(x-4a)(x-2a)} \leq 0
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-2a$		a		$2a$		$4a$		$+\infty$
$x^2 + ax - 2a^2$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$(x-4a)(x-2a)$		$+$		$+$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	
$\dfrac{x^2+ax-2a^2}{(x-4a)(x-2a)}$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

Ainsi les solutions sont

$$\boxed{S_a = [-2a, a]\cup]2a, 4a[}$$

6. Pour $a < 0$, la seule chose qui change est l'ordre des valeurs $-2a, a, 2a, 4a$. On a dans ce cas : $4a < 2a < a < -2a$ et donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$4a$	$2a$	a	$-2a$	$+\infty$
$x^2+ax-2a^2$	$+$	$+$	$+$	0 $-$	0 $+$	
$(x-4a)(x-2a)$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$\dfrac{x^2+ax-2a^2}{(x-4a)(x-2a)}$	$+$	$-$	$+$	0 $-$	0 $+$	

Ainsi les solutions pour $a<0$ sont

$$\boxed{S_a =]4a, 2a[\cup [a, -2a]}$$

Exercice 5 (D'après Agro 2017)**.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \ln(u_n+1)+\ln(2) \end{cases}$$

On rappelle que e désigne l'unique réel vérifiant $\ln(e)=1$ et que $2<e<3$.

1. Justifier que $2\ln(2)\geq 1$ et $\ln(4)+\ln(2)\leq 3$
2. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$
$$u_n\in[1,3]$$
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$u_n\leq u_{n+1}$$

Correction 5.

1. Comme $4>3>e$ on a bien
$$\boxed{2\ln(2)=\ln(4)\geq 1}$$
.
Comme $2<e$, on a $3\ln(2)\leq 3$, donc $\ln(8)\leq 3$. Or $\ln(2)+\ln(4)=\ln(2\times 4)=\ln(8)$ ainsi
$$\boxed{\ln(4)+\ln(2)\leq 3}$$
2. On pose P la proposition de récurrence $P(n)$: "$u_n\in[1,3]$"
Initialisation : $P(0)$ est vraie d'après l'énoncé.
Hérédité : Supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors $1\leq u_n\leq 3$ D'après la croissance de la fonction $x\mapsto\ln(x+1)$ on a alors
$$\ln(1+1)\leq\ln(u_n+1)\leq\ln(3+1)$$
et donc
$$2\ln(2)\leq\ln(u_n+1)+\ln(2)\leq\ln(4)+\ln(2)$$
Ce qui implique que
$$\ln(4)\leq u_{n+1}\leq 3\ln(2)$$

$$1\leq u_{n+1}\leq 3$$
Conclusion : Par principe de récurrence pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[1,3]$

3. On pose Q la proposition de récurrence $Q(n)$: "$u_n \leq u_{n+1}$"
Initialisation : $Q(0)$ stipule que $u_0 \leq u_1$. Or $u_1 = \ln(1+1) + \ln(2) = 2\ln(2) = \ln(4)$ Comme $e > 4$ on a bien $u_1 > \ln(e) = 1 = u_0$
Hérédité : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ soit vraie. On a alors $u_n \leq u_{n+1}$ D'après la croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ on a alors
$$\ln(u_n + 1) \leq \ln(u_{n+1} + 1)$$
et donc
$$\ln(u_n + 1) + \ln(2) \leq \ln(u_{n+1} + 1) + \ln(2)$$
et finalement
$$u_{n+1} \leq u_{n+2}$$
Conclusion : Par principe de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$

Exercice 6. Dans cet exercice, on considère une suite quelconque de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

1. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1.
2. Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \exp(n)$.
3. (a) Démontrer que, pour tout $(n \geq 1, n \geq k \geq 1)$,
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.
   (c) Calculer la valeur de b_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_n = \frac{1}{n+1}$.

Correction 6.

1. Pour $a_n = 1$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
2. Pour $a_n = \exp(n)$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^k = (1 + e^1)^n$.
3. (a)
$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$
   (b) Comme le premier terme est nul $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}$ Et d'après la question précédente on a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$ Or en faisant un changement de variable on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$. Donc
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$$

(c) D'après la question 3a) on a $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$. Donc

$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

On fait un changement de variable $k+1 = j$ on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{j} \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} - 1\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)
\end{aligned}$$

Exercice 7. Pour chaque script, dire ce qu'affiche la console :

1. Script1.py

```python
a=0
b=1
c=a+b
a=3
print('a=',a, 'b=',b, 'c=', c)
```

2. Script2.py

```python
a=0
b=1
c=a+b
a=3
c=a+c
print('a=',a, 'b=',b, 'c=', c)
```

3. Script3.py

```python
a=0
b=1
if a>=-1:
    a=2
else:
    a=10
print('a+b=', a+b)
```

4. Script4.py

```python
a=0
b=1
if a!=b:
    a=1
else:
    a=2
print('a=',a, 'b=',b)
```

5. Script5.py

```python
a=0
b=1
c=2
if a==b:
    a=2
      c=(b+1)**4
else:
    a=b
    c=(b+1)**3
print('a=',a, 'b=',b, 'c=', c)
```

6. Script6.py

```python
a=0
b=1
c=2
if a==b:
    a=-2
    c=3
elif a<0:
    a=b
    c=4
else:
    a=2
    c=5
c=6
print('a=',a, 'b=',b, 'c=', c)
```