TD 1 - Nombres réels

I Ensembles

Exercice 1. Décrire sous forme d'intervalles (ou d'union d'intervalles) les ensembles suivants :

1. $E_1 = \{x \,|\, x^2 + 1 < 2\}$
2. $E_2 = \{x^2 + 1 \,|\, x < 2\}$
3. $E_3 = \{x + y \,|\, x \in [0,1],\ y \in [0,1]\}$
4. $E_4 = \{x - y \,|\, x \in [0,1],\ y \in [0,1]\}$

Exercice 2. Dire si les ensembles suivants sont majorés, minorés, bornés ?

1. $E_1 = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 + 1 > 2\}$
2. $E_2 = \{x^2 \,|\, x < 2\}$
3. $E_3 = \{\exp(x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$
4. $E_4 = \{2^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$
5. $E_5 = \{x + y \,|\, x \in]1, +\infty],\ y \in [1, +\infty[\}$
6. $E_6 = \{x - y \,|\, x \in]1, +\infty],\ y \in [1, +\infty[\}$
7. $E_7 = \{x^2 - y^2 \,|\, x \in]1, +\infty],\ y \in [1, +\infty[\}$
8. $E_8 = \{\frac{x}{y} \,|\, x \in]1, +\infty],\ y \in , +\infty[\}$

Exercice 3. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y = 2\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geq 0\right\}.$$

Représenter graphiquement A et B et montrer que $A \subset B$. A-t-on égalité ?

II Calculs

Exercice 4. Simplifier au maximum :

1. $\frac{4^{10}}{8^4}$
2. $10^3 10^{-4} 100^3$
3. $\frac{(10^4)^2}{10^5}$
4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
5. $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24}$
6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

Exercice 5. Mettre sous la forme d'une seule fraction l'expression suivante :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} + \frac{1}{x - \frac{1}{\frac{x}{1-x}}}$$

III Résolution d'équations et d'inéquations :

Exercice 6. Résoudre les (in)-équations suivantes :

1. $x^3 + 4x^2 + x - 6 \geq 0$
2. $x^3 - x^2 - x - 2 < 0$
3. $(3x - 1)(x + 2) + (2 - 6x)(4x + 3) > 0$
4. $32x^6 - 162x^2 < 0$
5. $\dfrac{2x}{4x^2 - 1} \leq \dfrac{2x + 1}{4x^2 - 4x + 1}$
6. $\dfrac{x^4 + x}{x^4 - 5x^2 + 4} < 1$
7. $2x^2 - 4x + 2 = 1 - x$
8. $(x - 1)^2 \leq 1$
9. $\dfrac{1}{x - 2} \leq \dfrac{1}{2x}$
10. $\dfrac{2x + 1}{1 + x} \geq \dfrac{3x - 2}{1 + x}$
11. $\dfrac{x^2 + 10x - 4}{x - 2} \leq \dfrac{16x + 2}{x + 1}$

Exercice 7. Résoudre l'équation pour $x \in \mathbb{R}$ de paramètre a :

$$\frac{1}{x - a} \geq x$$

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $m(x+2) = 2m(3x-4)$
2. $(m+1)x + 2 - m = 0$
3. $e^{2x} - 2me^x + 1 = 0$
4. $\dfrac{m+3}{x} = \dfrac{2m-1}{x-1}$
5. $x - m = \sqrt{x^2 + mx}$.

Exercice 9. Trouver toutes les valeurs du paramètre m telles que l'équation suivante ait deux racines réelles distinctes : $mx^2 + (m-2)x + 2m - 2 = 0$.

IV Valeur absolue

Exercice 10. Résolution d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues :

1. $|2+x| + 2 + 2x = x^2$
2. $x^2 = |x|$
3. $|2x-3| \leq 2$
4. $|2x+3| - |-5x+6| \geq 3x+2$
5. $|x^2 - 1| \leq 2|x|$
6. $||x| - 5| \geq ||3x| - 3|$
7. $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq |3x+2|$
8. $\dfrac{x^2 + \sqrt{2}x}{|x^2-1|+1} \geq 1$

V Partie entière

Exercice 11. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x - \lfloor x \rfloor}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est périodique de période 1.
3. Donner une expression simplifier de f sur les intervalles de la forme $]k, k+1[$, $k \in \mathbb{N}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que x est rationnel si et seulement si $f(x)$ est rationnel.

Exercice 12 (Problème)**.** On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\left\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \right\rfloor = 0 \tag{E}$$

1. Déterminer le domaine de définition de E.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a.
3. Montrer que résoudre (E) revient à résoudre deux inéquations qu'on déterminera.
4. Résoudre les deux équations obtenues à la question précédente.
5. Résoudre (E).

Exercice 13. Montrer que la fonction partie entière est croissante, ie montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, :

$$x \leq y \Longrightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor .$$

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Exercice 14. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor .$$

VI Racine carrée

Exercice 15. Résolution d'équations et d'inéquations avec des radicaux :

1. $\sqrt{x+1} = x-1$
2. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} \leq 1$
3. $\sqrt{x^2-3} > 5x-9$
4. $e^x - 1 \geq \sqrt{e^{x+1} - e^x - e + 1}$
5. $\sqrt{(x+3)(x-1)} \geq 2x-1$
6. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x+2} = 1$
7. $1 \leq \left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)^2 \leq 9$
8. $\sqrt{9^x - 1} > 3^x - 2$

Exercice 16. On considère l'expression $R(a) = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

1. Pour quels valeurs de a, $R(a)$ est-elle bien définie ?
2. Pour ces valeurs, simplifier l'expression $R(a)$. Tracer la fonction $a \mapsto R(a)$.

VII Fonction majorée, minorée, bornée

Exercice 17. Chercher la borne inférieure, supérieure et dire si ce sont des maximum, minimum pour les ensembles suivants :

1. $E_1 = \{x - \lfloor x \rfloor \mid x \in \mathbb{R}\}$
2. $E_2 = \{-x^2 + 3x - 1 \mid x \in [-1, 1]\}$
3. $E_3 = \{\exp(-x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $E_4 = \{\frac{1}{n!+1} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

Exercice 18. Déterminer lorsqu'ils existent les bornes supérieures, inférieures, maxima et minima des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $[0, +\infty[$.
2. $f : x \mapsto \cos x + \sin x$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + \ln(x)}$ sur $[1, +\infty[$.
4. $f : x \mapsto 5\ln(x) - x + \dfrac{6}{x}$ sur $[1, 6]$ (on donne $5\ln(3) \leq 6$).