

TD 3 - Suites réelles usuelles

I Factorielles

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{7!}{6!}, \quad B = \frac{3 \times 4!}{(3!)^2}, \quad C = \frac{n!}{(n-1)!}, \quad D = \frac{(n+1)!}{(n-3)!} \quad \text{et} \quad E = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!}.$$

II Calculs de sommes

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{k=0}^n x^{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n x^{2k+1} & 5. \sum_{k=2}^{n^2} (1-a^2)^{2k+1} & 9. \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j} a^j \\ 2. \sum_{k=0}^n a^k 2^{3k} x^{-k} \quad \text{avec} \quad x \neq 0 & 6. \sum_{k=1}^n (3 \times 2^k + 1) & 10. \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} (-1)^i \\ 3. \sum_{i=0}^n (i^2 + n + 3) & 7. \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k}{n}\right) & 11. \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}} \\ 4. \sum_{i=1}^n (2i-1)^3 & 8. \sum_{k=0}^n (2k-1+2^k) & 12. \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \binom{n}{k} \end{array}$$

Exercice 3. Coefficients binomiaux

Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{array}{l} 1. S_1 = \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} \\ 2. T = \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k}, \quad \text{puis} \quad S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} \quad (\text{on pourra écrire que } k^2 = k(k-1) + k). \\ 3. S_3 = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \binom{n}{i}. \end{array}$$

Exercice 4. Sommes télescopiques

$$\begin{array}{l} 1. \text{ Soit } x_0, x_1, \dots, x_n \text{ des nombres réels avec } n \in \mathbb{N}. \text{ Calculer : } \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_{i-1}). \\ 2. \text{ Calculer : } \sum_{k=3}^n \ln \left[\frac{k^2}{(k+1)(k-2)} \right] \end{array}$$

Exercice 5. Sommes télescopiques

$$1. \text{ Déterminer } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2}. \text{ En déduire : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

2. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+3}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k(k+1)(k+3)}$.

3. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Retrouver ce résultat par récurrence : montrer que $\forall n \geq 1 : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

Exercice 6. Sommes et dérivation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

1. On pose, pour tout x dans \mathbb{R} , $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. Calculer $f(x)$.

2. En déduire, pour tout x dans \mathbb{R} , la valeur de $g(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$, puis en déduire S .

Exercice 7. Sommes et dérivation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on pose $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$.

1. Calculer $f(x)$.

2. En dérivant, calculer $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$, et en déduire $\sum_{k=1}^n kx^k$.

3. Calculer de la même façon : $\sum_{k=2}^n k(k-1)x^{k-2}$.

Exercice 8. Sommes d'indices pairs et impairs

Soit n un entier naturel non nul. On définit les sommes suivantes : $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.

1. Montrer que $S_n + T_n = 2^{2n}$ et $S_n - T_n = 0$.

2. En déduire une expression de S_n et de T_n en fonction de n .

III Calculs de produits

Exercice 9. Soit $(n, p, i) \in \mathbb{N}^2$ non nuls. Calculer les produits suivants :

1. $\prod_{k=1}^n k$ et $\prod_{k=i}^{i+n} k$

4. $\prod_{k=1}^n (4k-2)$

2. $\prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{k}{n}\right)$

5. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

3. $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$

6. $\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}$. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{2} \right)$.

IV Calculs de sommes doubles

Exercice 11. Dans cet exercice, n, m et p sont deux entiers naturels non nuls et x un nombre complexe. Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m p(q^2 + 1)$

4. $\sum_{k=0}^n \sum_{l=k}^n \frac{k}{l+1}$

7. $\sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^j \frac{x^i}{x^j}$

2. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1$ et $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 1$

5. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x^j$

8. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \binom{j}{i}$

3. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i2^j$

6. $\sum_{k=0}^{n^2} \sum_{i=k}^{k+2} ki^2$