Table des matières

Chapitre 5 - Suites réelles usuelles

Définition 1. Définition d'une suite :

- Une suite réelle u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
- Pour désigner les valeurs prises par la suite, on note u_n à la place de $u(n)$.
- Pour désigner la suite globale, on écrit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: c'est la suite de terme général u_n.

Remarque. Certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un certain rang.
Exemple : ....
Plus généralement, on note .... la suite de terme général u_n définie à partir du rang n_0.

⚠ Ne pas confondre ....

Représentation graphique d'une suite On peut représenter graphiquement une suite réelle en portant en abscisse les entiers naturels et en ordonnées les valeurs correspondantes de la suite. On obtient ainsi une succession de points qui décrivent l'évolution de la suite.

Exemple 1. Représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$.

I Suites usuelles

I. 1 Définitions, notations

I. 2 Suite arithmétique

Définition 2. Définition d'une suite arithmétique :
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Proposition 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

- Expression explicite : $u_n = u_0 + nr$
- Limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \left\{ \right.$
- Somme des termes : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k =$

Remarque. Une suite $(u_n)_{n\geq p}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_p si ....
On a alors $u_n =$ .... et $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k =$ ....

I. 3 Suite géométrique

Définition 4. Définition d'une suite géométrique : Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite géométrique de raison q

$$u_{n+1} = qu_n$$

Proposition 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

- Expression explicite : $u_n =$
- Limite (pour $u_0 > 0$) : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \left\{ \right.$
- Somme des termes : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \left\{ \right.$

Remarque. Une suite $(u_n)_{n\geq p}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_p si ....
On a alors $u_n =$ .... et $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k =$ ....

I. 4 Suite arithmético-géométrique

Définition 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit qu'elle est arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b ($a \neq 1$ et $b \neq 0$ sinon on est dans les deux cas précédents) tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

- Recherche de la limite éventuelle en résolvant $al + b = l$.
- Étude de la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - l$.
  - ⋆ Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.
  - ⋆ En déduire son expression explicite.
- Expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + l$.

Exemple 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + 4$. Calculer u_n.

1. **Recherche de la limite éventuelle :**
2. **Étude de la suite auxiliaire $(\mathbf{v_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$**
3. **Expression explicite de la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$**
4. **Limite de la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$**

Exercice 7. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$. Donner son expression explicite, sa limite et la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Remarque. ⚠ Les réels a et b ne doivent pas dépendre de n !

Exercice 8. Trouver le terme général des suites définies par $u_{n+1} = nu_n, u_{n+1} = \frac{2}{n}u_n$, et $u_{n+1} = u_n^2$.

I. 5 Suite récurrente linéaire d'ordre deux

Définition 9. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $b \neq 0$. On appelle suite récurrente linéaire d'ordre deux toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$(\mathcal{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} =$$

avec deux conditions initiales données (u_0 et u_1).

- Résolution de l'équation caractéristique associée à la suite :

$$(E) \quad x^2 - ax - b = 0.$$

- Expression explicite de la suite selon le signe du discriminant de l'équation caractéristique :
  - ⋆ Si $\Delta > 0$: (E) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, et l'expression explicite de la suite est :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$$

- $\star$ Si $\Delta = 0$, (E) a une solution réelle double r_0, et l'expression explicite de la suite est :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$$

- $\star$ Si $\Delta < 0$: (E) a deux solutions complexes conjuguées que l'on écrit sous forme exponentielle $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ (avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$). L'expression explicite de la suite est alors :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$$

- Calcul des constantes α et β à l'aide des valeurs des conditions initiales u_0 et u_1 en résolvant un système linéaire.

Exemple 3. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$.

Exercice 10. Étudier les suites définies par :

- $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
- $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

‘

II Principales propriétés sur les suites

II. 1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si ....

Exercice 12.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée si ....

Exercice 13.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2+2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée par 0 et 1.
3. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1}\dfrac{1}{k}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par $\ln 2$. On pourra utiliser après l'avoir démontrée l'inégalité suivante : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.

Cas particulier des suites définies explicitement $u_n = f(n)$ L'étude de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ permet d'obtenir les propriétés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 14. Majoration, minoration.

- Si la fonction f est majorée sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée
- Si la fonction f est minorée sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée
- Si la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

II. 2 Suites croissantes, décroissantes, monotones

Définition 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si ....

⚠ Il existe plein de suites qui ne sont ....
Exemple : ....

II. 2. a Méthodes

❶ **Étude du signe de $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$:**

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

On utilise cette méthode lorsque la suite est définie plutôt comme ....

Exercice 16. Étudier la monotonie des deux suites suivantes :

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n^2 - 2n$.

(b) La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

❷ **Comparaison de $\mathbf{u_{n+1}/u_n}$ avec 1 si les termes de la suite sont strictement positifs :**

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

On utilise cette méthode lorsque la suite est définie plutôt comme ....

Exercice 17. Étudier la monotonie des deux suites suivantes :

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{n^2}{n!}$.

(b) La suite $(P_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 18.

- Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 + 3^{-n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3.
- Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-1-n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{1}{e}$.

Exercice 19. Soit f une définie sur $\mathbb{R}_+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dérfinie par $u_n = f(n)$. Montrer que

- Si la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

Exercice 20. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-n}$.

III Limites

III. 1 Suites monotones

Ce théorème est vraiment très important, on l'utilise très souvent.

Théorème 21. Théorème sur les suites monotones

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle converge vers une limite finie
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors elle converge vers une limite finie
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$

Exercice 22. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$. Montrer que la suite est bornée par $\frac{1}{2}$ et 1. Étudier sa monotonie, puis conclure sur sa convergence.

Exercice 23. Étudier l'éventuelle convergence des deux suites implicites étudiées au début de ce cours.

III. 2 Endcadrement

Théorème des gendarmes pour montrer une convergence et obtenir la valeur de la limite :

Théorème 24. Théorème des gendarmes :
Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les hypothèses suivantes :

- à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n \leq w_n$
- $u_n \to \ell$ et $w_n \to \ell$

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell$.

Exemple 4. Étudier le comportement de la suite $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:

Correction On a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\, |\sin(x)| \leq 1$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Comme $\frac{1}{n} \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

Exercice 25. 1. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Étudier la convergence de cette suite.

2. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

III. 3 Passage à la limite

- si f est C^0 $f(u_n) \to f(\ell)$
- si $u_n \leq v_n$ alor $\ell \leq \ell'$

III. 4 Suites adjacentes

Définition 26. Définition de deux suites adjacentes :
Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit qu'elles sont adjacentes si

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (ou inversement)
- $(u_n - v_n) \to 0$

Théorème 27. Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes.
Alors les suites convergent et ont même limite.

Exercice 28. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$. Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite.

Correction $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une somme de termes positifs, elle est donc croissante.
Pour l'étude de la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculons $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{(n)(n)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n}{n(n+1)(n+1)!} - \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} \\
&= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\
&= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \qquad < 0
\end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Enfin

$$v_n - u_n = \frac{1}{nn!} \to 0$$

Donc les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. D'après le théorème, elles convergent et ont même limite.

III. 5 Croissances comparées

Théorème 29. Croissances comparées :
Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$. On a :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{n\gamma}}{n!} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^\beta}{e^{n\gamma}} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

On peut retenir sous forme résumée qu'en $+\infty$:

$$(\ln n)^\alpha << n^\beta << e^{n\gamma} << n! << n^n.$$