Correction DM4

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)+1=0$$

Correction 1. On pose, $Z=\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)$, l'équation devient alors :

$$Z^3+Z^2+Z+1=0.$$

On remarque que -1 est une racine du polynôme, Z^3+Z^2+Z+1, qui se factorise alors en $(Z+1)(Z^2+1)$. $Z^2+1=(Z-i)(Z+i)$ et on a donc

$$Z^3+Z^2+Z+1=(Z+1)(Z-i)(Z+i).$$

1. Pour $Z=-1 \iff \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)=-1$, on obtient $z-2i=-z-2i$ soit
$$z=0.$$
2. Pour $Z=i \iff \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)=i$, on obtient $z-2i=iz-2$. Soit $z(1-i)=-2+2i$, donc
$$z=-2$$
3. Pour $Z=-i \iff \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)=-i$, on obtient $z-2i=-iz+2$ soit $z(1+i)=2+2i$ donc
$$z=2$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$\boxed{\mathcal{S}=\{-2,0,2\}}$$

Exercice 2. Soit $n\in\mathbb{N}$. On définit la somme pour tout $x\in]0,2\pi[$:

$$Z(x)=\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}.$$

1. Montrer par récurrence que $Z(x)=\frac{1-e^{(n+1)ix}}{1-e^{ix}}$.
On suppose que $n\geq 2$, on pose :
$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$
2. Justifier que $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3. Prouver que : $S_n=\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
4. En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$.

Correction 2.

1. C'est l'exercice 2 du TD 1 - Récurrence, où $q = e^{ix}$.

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{0\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)$ Or $\sin\left(\frac{0\pi}{n}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) = \sin(\pi) = 0$. Donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

3. On a $Z(\dfrac{\pi}{n}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik\frac{\pi}{n}}$. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ik\frac{\pi}{n}} &= \frac{1 - e^{i(n+1)\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\
&= \frac{1 - e^{i\pi + i\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\
&= \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} + e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)} \\
&= \frac{\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} + e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)}{\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)} \\
&= \frac{2\cos(\frac{\pi}{2n})}{2i\sin(\frac{\pi}{2n})} \\
&= \frac{1}{i\tan(\frac{\pi}{2n})}
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Im}(Z(x)) &= \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{Im}(e^{ikx}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sin(kx))
\end{aligned}$$

Donc $S_n = \mathfrak{Im}(Z(\frac{\pi}{n})) = \mathfrak{Im}(\frac{1}{i\tan(\frac{\pi}{2n})}) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2n})}$

4. On a d'après la question précédente $\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{8}} = S_4$ Donc $\tan(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{S_4}$.

   Par ailleurs $S_4 = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{1\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$.

   Donc

$$\boxed{\tan(\tfrac{\pi}{8}) = \tfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

5. Montrons que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$. On a en effet pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$:

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

En particulier $\tan'(0) = 1$ et par définition de la dérivée en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = \tan'(0) = 1$$

On a $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n\tan(\frac{\pi}{2n})}$, et

$$\begin{aligned}
n\tan(\frac{\pi}{2n}) &= \frac{\tan(\frac{\pi}{2n})}{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{\frac{\pi}{2}\tan(\frac{\pi}{2n})}{\frac{\pi}{2n}}
\end{aligned}$$

On vient de voir que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$, comme $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{2n} = 0$ on a par composé de limites :

$$\lim_{n\to\infty} n\tan(\frac{\pi}{2n}) = \frac{\pi}{2}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{2}{\pi}.}$$