

DM4

Exercice 1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) + 1 = 0$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la somme pour tout $x \in]0, 2\pi[$:

$$Z(x) = \sum_{k=0}^n e^{ikx}.$$

1. Montrer par récurrence que $Z(x) = \frac{1-e^{(n+1)ix}}{1-e^{ix}}$.

On suppose que $n \geq 2$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

2. Justifier que $S_n = \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

3. Prouver que : $S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

4. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$.