Fiche récapitulative - Nombre Complexe

I Définitions

Définition 1. Les nombres complexes forment un ensemble noté $\mathbb{C}$ de la forme

$$\mathbb{C} = \{x + iy \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

où i est un nombre qui vérifie $i^2 = -1$. Pour un nombre $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, x s'appelle la partie réelle et y la partie imaginaire.

Remarques :

- En particulier pour $y = 0$ on voit que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- Pour $x = 0$, les nombres de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$ s'appelle des imaginaires pures.
- Les calculs sur $\mathbb{C}$ étendent ceux sur $\mathbb{R}$ avec la règle supplémentaire que $i^2 = -1$

Définition 2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Remarques :

- Cette formule très utile permet entre autre de retrouver les formules trigonométriques...
- La fonction exponentielle s'étend à tout nombre complexe par

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

- Remarquons enfin que l'exponentielle complexe est $2i\pi$ périodique :

$$e^{z+2i\pi} = e^z$$

Définition 3. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle module de z et on note $|z|$ le nombre

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle conjugué de z et on note $\overline{z}$ le nombre

$$\overline{z} = x - iy$$

Remarques :

- $|z| \in \mathbb{R}$ étend la valeur absolue à tous les nombres complexes.
- $|z|^2 = z\overline{z}$
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $|e^{i\theta}| = 1$
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

Définition 4. Pour tout nombre complexe z (non nul) il existe deux réels $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Cette façon d'écrire un nombre complexe s'appelle la forme polaire (ou exponentielle ou trigonométrique) de z.

Remarques :

- θ est appelé argument de z, il n'est pas unique. On peut le choisir dans $[0, 2\pi[$ (pourquoi ?) dans ce cas, on l'appelle argument principal.
- On retrouve le module de z avec la forme polaire : $|z| = \rho$
- La forme polaire est très pratique pour calculer des puissances de z.

Définition 5. A tout point $M = (x, y)$ du plan on associe le nombre complexe $z = x+iy$. On dit que z est l'affixe de M.

Remarques :

- L'interprétation géométrique des complexes est indispensable à la bonne compréhension de $\mathbb{C}$.
- L'écriture cartésienne : $x + iy$ correspond à repérer un point M par son abscisse et son ordonnée. L'écriture polaire correspond à repérer un point M par sa distance à l'origine et l'angle entre la droite des abscisse et la droite (OM)

II Formulaire

— $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\mathfrak{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

— $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}).$$

— $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta) = \mathfrak{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \mathfrak{Im}(e^{i\theta}).$$

— La conjugaison est **involutive** : $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{\overline{z}} = z$.

— La conjugaison est **linéaire** :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad \text{et} \quad \overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}.$$

— La conjugaison passe au produit et au quotient

$$\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}, \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

— Moivre : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

— Moivre 2 : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

— $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}^2$, $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$

— $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$

Calcul 16.1 — **Écriture algébrique.**

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $(2+6i)(5+i)$ ....

b) $(3-i)(4+i)$ ....

c) $(4-3i)^2$ ....

d) $(1-2i)(1+2i)$ ....

e) $(2-3i)^4$ ....

f) $\dfrac{1}{3-i}$ ....

g) $\dfrac{2-3i}{5+2i}$ ....

h) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ....

Calcul 16.2 — **Forme exponentielle.**

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

a) 12 ....

b) -8 ....

c) $\sqrt{3}i$ ....

d) $-2i$ ....

e) $-2e^{i\frac{3\pi}{5}}$ ....

f) $5-5i$ ....

g) $-5+5i\sqrt{3}$ ....

h) $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....