

Logarithme et exponentielle

Règles de calculs 1. On a pour tout $x > 0$:

$$\exp(\ln(x)) = x$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(\exp(x)) = x$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\exp(a \ln(b)) = b^a$$

Règles de calculs 2. On note souvent e à la place de \exp et on utilise alors la notation "puissance".

- $e^x = \exp(x)$
- $e^1 = \exp(1) = e$
- $e^0 = \exp(0) = 1$

En conséquence :

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$

Règles de calculs 3. Soient $(a > 0, b > 0)$:

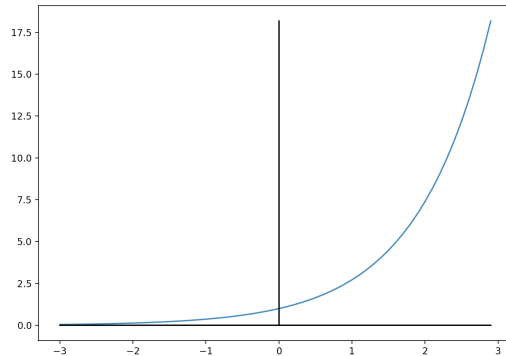
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^p) = p \ln(a)$

Règles de calculs 4. Soient $(a, b \in \mathbb{R})$:

- $e^a e^b = e^{a+b}$
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- $(e^a)^b = e^{ab}$

Règles de calculs 5. La fonction exponentielle est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$:

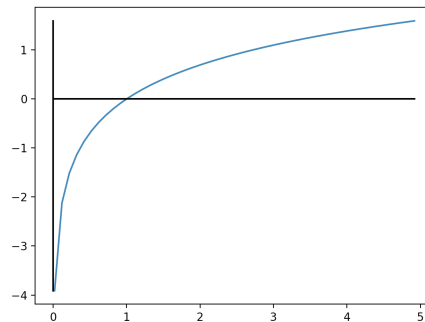
$$\exp'(x) = \exp(x)$$



Graphique de la fonction exponentielle

Règles de calculs 6. La fonction logarithme est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$



Graphique de la fonction logarithme

Proposition 7 (Inégalités utiles - à savoir redémontrer). $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) \geq x + 1$$

$$\forall x > -1 :$$

$$\ln(x + 1) \leq x$$

Vous trouverez l'ensemble des exercices du cahier de calcul sur http://olivierglorieux.fr/wp-content/uploads/2021/09/cahier_de_calcul_enonces_v2.pdf et les corrigés (à regarder après avoir chercher suffisamment longtemps les réponses) sur http://olivierglorieux.fr/wp-content/uploads/2021/09/cahier_de_calcul_corriges_v2.pdf

Calcul 7.1



Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

- a) $\ln 16$ d) $\frac{1}{8} \ln \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{8}$
- b) $\ln 512$ e) $\ln 72 - 2 \ln 3$
- c) $\ln 0,125$ f) $\ln 36$

Calcul 7.2



Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

- a) $\ln \frac{1}{12}$ d) $\ln 500$
- b) $\ln(2,25)$ e) $\ln \frac{16}{25}$
- c) $\ln 21 + 2 \ln 14 - 3 \ln(0,875)$ f) $\ln(6,25)$

Calcul 7.3



Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$

Calcul 7.4 — Logarithme et radicaux.



a) On pose $\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2} + 1)$. Calculer $(1 + \sqrt{2})^2$ et $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$.

En déduire une écriture simplifiée de α en fonction de $\ln(\sqrt{2} - 1)$

b) Calculer β sachant que $\ln \beta = \ln(7 + 5\sqrt{2}) + 8 \ln(\sqrt{2} + 1) + 7 \ln(\sqrt{2} - 1)$

c) Simplifier $\gamma = \ln((2 + \sqrt{3})^{20}) + \ln((2 - \sqrt{3})^{20})$

d) Simplifier $\delta = \ln\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$

Calcul 7.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

- | | | | |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------|
| a) $e^{3 \ln 2}$ | <input type="text"/> | d) $e^{-2 \ln 3}$ | <input type="text"/> |
| b) $\ln(\sqrt{e})$ | <input type="text"/> | e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$ | <input type="text"/> |
| c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$ | <input type="text"/> | f) $e^{\ln 3 - \ln 2}$ | <input type="text"/> |

Calcul 7.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$ | <input type="text"/> | d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$ | <input type="text"/> |
| b) $e^{-\ln \ln 2}$ | <input type="text"/> | e) $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$ | <input type="text"/> |
| c) $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$ | <input type="text"/> | f) $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$ | <input type="text"/> |

Calcul 7.10



Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

- | | |
|---|----------------------|
| a) $e^{3x-5} \geq 12$ | <input type="text"/> |
| b) $1 \leq e^{-x^2+x}$ | <input type="text"/> |
| c) $e^{1+\ln x} \geq 2$ | <input type="text"/> |
| d) $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$ | <input type="text"/> |
| e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ | <input type="text"/> |
| f) $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$ | <input type="text"/> |