I Suites arithmético-géométrique

Ce sont les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient une relation de récurrence du type

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (AG)$$

où a, b sont deux réels.

Remarques :

- Si $a = 0$, on est dans le cas d'une suite constant égal à b
- Si $a = 1$, on retombe sur une suite arithmétique de raison b.
- Si $b = 0$, on retombe sur une suite géométrique de raison a.

Pour trouver l'expression de ce type de suite en fonction de n on est amené à se ramener à une suite géométrique. Pour cela, on va proposer trois méthodes sur l'exemple suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n + 9 \\ u_0 &= 2 \end{cases}$$

Methode 1 : On considére une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$ et on cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.

Par définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha$ et par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $u_{n+1} = 4u_n + 9$. On obtient donc

$$v_{n+1} = 4u_n + 9 - \alpha$$

Rappelons que l'on souhaite que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique, il faut donc qu'elle vérifie une relation du type $v_{n+1} = qv_n$ pour un $q \in \mathbb{R}$. Or pour l'instant on a exprimé v_{n+1} en fonction de u_n. Il faut donc repasser à v_n en utilisant la définition de v_n : $v_n = u_n - \alpha$ ou autrement dit $u_n = v_n + \alpha$. En remplacant dans l'égalité précédente on obtient :

$$v_{n+1} = 4(v_n + \alpha) + 9 - \alpha$$

Ce qui donne après simplification :

$$v_{n+1} = 4v_n + 3\alpha + 9$$

Voilà ! il suffit alors de choisir α afin que $3\alpha + 9$ soit nul. On résout $3\alpha + 9 = 0$ on tombe sur $\alpha = -3$.

Ainsi la suite définie par $v_n = u_n - (-3) = u_n + 3$ est une suite géométrique de raison 4 (le 4 de l'équation $v_{n+1} = 4v_n + 3\alpha + 9$) Donc on sait calculer $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n :

$$v_n = 4^n v_0$$

Et il nous reste à retranscrire cette équation avec u_n (toujours en utilisant la définition de v_n c'est la seule chose qu'on connaisse)

$$u_n + 3 = 4^n(u_0 + 3)$$

Au final on obtient

$$\boxed{u_n = 4^n(2 + 3) - 3 = 5 \times 4^n - 3}$$

Methode 2 On considére les suites constantes qui vérifient la relation $u_{n+1} = 4u_n + 9 \quad (AG)$ et on s'intéressera ensuite à la valeur initiale u_0. Soit donc c_n une suite constante qui vérifie la relation (AG). Soit c la valeur de cette constante. Comme $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, elle vérifie $c_{n+1} = c_n = c$ et comme elle vérifie (AG) on a

$$c = 4c + 9$$

ce qui donne $c = -3$.

Remarquons maintenant que l'on a les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n + 9 \\ c_{n+1} &= 4c_n + 9 \end{cases}$$

Ce qui donne en soustrayant :

$$u_{n+1} - c_{n+1} = 4(u_n - c_n)$$

Donc la suite $v_n = u_n - c_n$ vérifie

$$v_{n+1} = 4v_n$$

C'est donc une suite géométrique de raison 4. On raisonne ensuite comme précédemment, on obtient $v_n = 4^n v_0$ et on revient à u_n avec la définiton de v_n :

$$u_n - c_n = 4^n(u_0 - c_0)$$

et comme c_n est constante égale à -3 on a

$$u_n + 3 = 4^n(2 + 3)$$

Au final on obtient

$$\boxed{u_n = 4^n(2 + 3) - 3 = 5 \times 4^n - 3}$$

Methode 3 On cherche les limites possibles pour u_n. Supposons que la suite converge et admette une limite ℓ. En passant à la limite dans (AG) on obtient

$$\ell = 4\ell + 9$$

ce qui donne $\ell = -3$ On considère ensuite $v_n = u_n - \ell = u_n + 3$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 3 \\ &= 4u_n + 9 + 3 \\ &= 4(v_n - 3) + 12 \\ &= 4v_n \end{aligned}$$

C'est donc une suite géométrique de raison 4. On raisonne ensuite comme précédemment, on obtient $v_n = 4^n v_0$ et on revient à u_n avec la définiton de v_n :

$$u_n - \ell = 4^n(u_0 - \ell)$$

Au final on obtient

$$\boxed{u_n = 4^n(2 + 3) - 3 = 5 \times 4^n - 3}$$

Remarques :

- Vous l'aurez compris le role de α, c et ℓ sont les mêmes dans chacunes des méthodes.

II Suite récurrente linéaires d'ordres 2 à coefficients constants

Ce sont les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient une relation de récurrence du type

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (SRL2)$$

où a, b sont deux réels.

Remarques :

- Si $b = 0$, on retombe sur une suite géométrique de raison a.
- ⚠Les coefficients a et b sont constants ! ⚠Par exemple, une suite qui vérifie $u_{n+2} = nu_{n+1} + 2u_n$ ne rentre pas dans le cadre des suites récurrentes linéaires d'ordres 2 à coefficients constants (n N'est PAS constant) et la méthode proposée ci-après ne marche plus du tout. Ca ne sert à rien d'essayer, vous allez vite dire des bêtises ! (⚠Surtout pas d'équation caractéristique si les coefficients ne sont pas constants) ! ! J'espère - mais je doute - que j'ai suffisament insisté ! !

Même si on peut imaginer plusieurs méthodes pour exprimer le terme général des suites récurrentes linéaires d'ordres 2 à coefficients constants, il y a une façon assez classique de procéder.

On appelle équation caractéristique associée à $(SRL2)$ l'équation

$$x^2 = ax + b \quad (EQ)$$

(parfois on appelle polynôme caractéristique le polynôme $x^2 - ax - b$)

On résout ensuite cette équation, on cherche donc les racines du polynomes $P(x) = x^2 - ax - b$. Comme il est bien connu maintenant, on distingue trois cas :

Cas 1 : P admet 2 racines réelles r_1, r_2 distinctes (C'est à dire si le discriminant de P est strictement positif) alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit sous la forme :

$$\boxed{u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n}$$

où α et β peuvent être déterminés à l'aide des conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs de u_0 et u_1 qui sont donnés dans l'énoncé. Cela signifie que toutes les suites de la forme $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ vérifient bien $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ peu importe les valeurs de α et β. Mais si on rajoute en plus les contraintes sur u_0 et u_1, par exemple $u_0 = 12$ et $u_1 = 23$ alors dans ce cas, il y aura qu'une seule valeur adaptée pour α et β qu'on déterminera en regardant le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha r_1^0 + \beta r_2^0 & = & u_0 \\ \alpha r_1^1 + \beta r_2^1 & = & u_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \alpha + \beta & = & 12 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 & = & 23 \end{array}\right.$$

Si on a les valeurs des racines on peut alors déterminer α et β

Cas 2 : P admet 2 racines complexes conjuguées r_1, r_2 distinctes (C'est à dire si le discriminant de P est strictement négatif) alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit sous la forme :

$$\boxed{u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n}$$

où α et β sont deux complexes qui peuvent être déterminés à l'aide des conditions initiales.

Cette dernière formule est vraie. Malheuresement, on ne voit pas de façon claire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeur réelle en l'écrivant ainsi. C'est pourquoi on propose souvent une autre version qui met en lumière le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeur réelle. On écrit r_1 sous forme exponentielle $r_1 = \rho e^{i\theta}$ (remarquons qu'alors $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ car la deuxième racine est la conjuguée de la première). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit alors sous la forme :

$$\boxed{u_n = (\delta\cos(n\theta) + \gamma\sin(n\theta))\rho^n}$$

où δ et γ sont deux réelles qui peuvent être déterminés à l'aide des conditions initiales.

Cas 3 : P admet 1 seule racine réelle r_0 (C'est à dire si le discriminant de P vaut 0) alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit sous la forme :

$$\boxed{u_n = \alpha r_0^n + \beta n r_0^n = (\alpha + \beta n) r_0^n}$$

où α et β peuvent être déterminés à l'aide des conditions initiales.