CH8 - Suites réelles

Table des matières

I Principales propriétés sur les suites

I. 1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si ....

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si ....

Exercice 2.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée si ....

Exercice 3.

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2+2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bornée par 0 et 1.
3. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1}\dfrac{1}{k}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par $\ln 2$. On pourra utiliser après l'avoir démontrée l'inégalité suivante : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.

Cas particulier des suites définies explicitement $u_n = f(n)$ L'étude de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ permet d'obtenir les propriétés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 4. Majoration, minoration.

- Si la fonction f est majorée sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée
- Si la fonction f est minorée sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée
- Si la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

I. 2 Suites croissantes, décroissantes, monotones

Définition 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si ....
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si ....

⚠ Il existe plein de suites qui ne sont ....
Exemple : ....

I. 2. a Méthodes

❶ Étude du signe de $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$:

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

On utilise cette méthode lorsque la suite est définie plutôt comme ....

Exercice 6. Étudier la monotonie des deux suites suivantes :

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n^2 - 2n$.

(b) La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

❷ Comparaison de $\mathbf{u_{n+1}/u_n}$ avec 1 si les termes de la suite sont strictement positifs :

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

On utilise cette méthode lorsque la suite est définie plutôt comme ....

Exercice 7. Étudier la monotonie des deux suites suivantes :

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$.

(b) La suite $(P_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $P_n = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

Exercice 8.
- Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 2 + 3^{-n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3.
- Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-1-n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\dfrac{1}{e}$.

Exercice 9. Soit f une définie sur $\mathbb{R}_+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dérfinie par $u_n = f(n)$. Montrer que
- Si la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

Exercice 10. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-n}$.

II Limites

Définition 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ en $+\infty$ (ou converge vers ℓ) si

$$\forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N\, |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

II. 1 Limites classiques

Théorème 12. Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient un voisinage de $+\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = f(n).$$

On suppose que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Exemple : Donner les limites des suites suivantes :

$$u_n = n^2 + n - 1$$

$$v_n = \frac{1}{e^n + 1}$$

Théorème 13. Croissances comparées :
Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$. On a :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{n\gamma}}{n!} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\beta}{e^{n\gamma}} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

On peut retenir sous forme résumée qu'en $+\infty$:

$$(\ln n)^\alpha << n^\beta << e^{n\gamma} << n! << n^n.$$

II. 2 Suites monotones

Ce théorème est vraiment très important, on l'utilise très souvent.

Théorème 14. Théorème sur les suites monotones

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle converge vers une limite finie
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors elle converge vers une limite finie
   - Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$

Exercice 15. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+n}$. Montrer que la suite est bornée par $\dfrac{1}{2}$ et 1. Étudier sa monotonie, puis conclure sur sa convergence.

Exercice 16. Étudier l'éventuelle convergence des deux suites implicites étudiées au début de ce cours.

II. 3 Endcadrement

Théorème des gendarmes pour montrer une convergence et obtenir la valeur de la limite :

Théorème 17. Théorème des gendarmes :
Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les hypothèses suivantes :

- à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n \leq w_n$
- $u_n \to \ell$ et $w_n \to \ell$

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell$.

Exemple 1. Étudier le comportement de la suite $\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:

Correction On a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,|\sin(x)| \leq 1$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$
Comme $\frac{1}{n} \to 0$,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

Exercice 18. 1. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Étudier la convergence de cette suite.

2. Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

II. 4 Passage à la limite

- si f est C^0 $f(u_n) \to f(\ell)$
- si $u_n \leq v_n$ alor $\ell \leq \ell'$

II. 5 Suites adjacentes

Définition 19. Définition de deux suites adjacentes :
Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit qu'elles sont adjacentes si

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (ou inversement)
- $(u_n - v_n) \to 0$

Théorème 20. Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes.
Alors les suites convergent et ont même limite.

Exercice 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$. Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite.

Correction $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une somme de termes positifs, elle est donc croissante.
Pour l'étude de la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculons $v_{n+1} - v_n$:
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{(n)(n)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n}{n(n+1)(n+1)!} - \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} & < 0 \end{aligned}$$
Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Enfin
$$v_n - u_n = \frac{1}{nn!} \to 0$$
Donc les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. D'après le théorème, elles convergent et ont même limite.

III Etude de $u_{n+1} = f(u_n)$

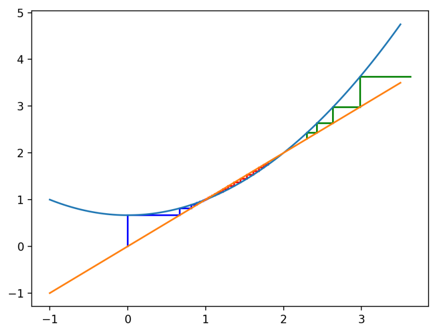
Sur l'exemple suivant :

Exercice 22. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n^2 + \dfrac{2}{3} \end{cases}$

1. Étudier la fonction f associée.
2. Montrer que $I_1 = [-1, 1]$, $I_2 = [1, 2]$ et $I_3 = [2, +\infty[$ sont des intervalles stables par f.
3. Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.
4. Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$?
6. On suppose que $u_0 \in]-1, 1[$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in]-1, 1[$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. On suppose que $u_1 \in [1, 2]$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in [1, 2]$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. On suppose que $u_0 > 2$.
   (a) Montrer que $u_n > 2$.
   (b) En déduire le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

III. 1 Représentation graphique de u_n

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

X=np.linspace(-1,3.5,100)
Y=(X**2+2)/3
plt.clf()
def f(x):
    return((x**2+2)/3)
u=0
for i in range(100):

    plt.plot( [u,f(u)],[f(u),f(u)] ,'b')
    plt.plot( [u,u],[u,f(u)],'b')
    u=f(u)

u=1.8
for i in range(100):

    plt.plot( [u,f(u)],[f(u),f(u)] ,'r')
    plt.plot( [u,u],[u,f(u)],'r')
    u=f(u)
u=2.3
for i in range(4):

    plt.plot( [u,f(u)],[f(u),f(u)] ,'g')
    plt.plot( [u,u],[u,f(u)],'g')
    u=f(u)

plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,X)

plt.show()
```



III. 2 Etude des valeurs possibles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Question 1 On étudie la fonction f associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est-à-dire dans notre cas : $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$

Définition 23. Intervalles stables.

Question 2.

III. 3 Etude du sens de variations

Rappel : Le sens de variations est donné par l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$
Question 3

III. 4 Limites éventuelles et limites

Proposition 24. <u>SI $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge</u> alors sa limite ℓ vérifie $f(\ell)=\ell$

Question 4

Question 5,6,7,8.