Correction - DM 5

Exercice 1. Soit z, z' deux nombres complexes.

1. Rappeler les valeurs de $A = z\overline{z}$, $B = |z\overline{z}|$, $C = |\overline{z}z'|^2$ en fonction de $|z|$ et $|z'|$.
2. On suppose dans cette question et la suivante que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$. Montrer que
$$\overline{z}z' \neq 1$$
3. Montrer que
$$1 - \left|\frac{z - z'}{1 - \overline{z}z'}\right|^2 = \frac{(1 - |z'|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{z}z'|^2}$$
4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes vérifiant : $|z_0| < 1, |z_1| < 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$z_{n+2} = \frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n}z_{n+1}}$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| < 1$ et que $\overline{z_n}z_{n+1} \neq 1$, et donc que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pourra utiliser les deux questions précédentes dans une récurrence double

Correction 1.

1. $A = |z|^2$, $B = |z||z'|$ $C = |z|^2|z'|^2$
2. Comme $|z| < 1$ et $|z'| < 1$ on a $|\overline{z}z'| = |\overline{z}||z'| = |z||z'| < 1$. Or si deux nombres complexes sont égaux ils ont même module, donc $\overline{z}z'$ ne peut pas être égal à 1, sinon ils auraient le même module.

   C'est un raisonement par l'absurde, voici la bonne façon de le rédiger :

   Soit deux complexes z, z' tel que $|z| < 1, |z'| < 1$. On suppose par l'absurde que $\overline{z}z' = 1$. On a alors $|\overline{z}z'| = |1|$ et donc $|z||z'| = 1$ Comme $|z| < 1, |z'| < 1$, on obtient $|z||z'| < 1$ et finalement $1 < 1$ ce qui est absurde. Ainsi $\overline{z}z' \neq 1$.)
3. Après avoir mis au même dénominateur le membre de gauche, on va utiliser le fait que pour tout complexe u, on a $|u|^2 = u\overline{u}$:
$$\begin{aligned}
1 - \left|\frac{z - z'}{1 - \overline{z}z'}\right|^2 &= \frac{|1 - \overline{z}z'|^2 - |z - z'|^2}{|1 - \overline{z}z'|^2}\\
&= \frac{(1 - \overline{z}z')(\overline{1 - \overline{z}z'}) - (z - z')(\overline{z - z'})}{|1 - \overline{z}z'|^2}\\
&= \frac{(1 - \overline{z}z')(1 - z\overline{z'}) - (z - z')(\overline{z} - \overline{z'})}{|1 - \overline{z}z'|^2}\\
&= \frac{(1 - \overline{z}z' - z\overline{z'} + |\overline{z}z'|^2) - (|z|^2 - \overline{z'}z - \overline{z}z' + |z'|^2)}{|1 - \overline{z}z'|^2}\\
&= \frac{(1 + |\overline{z}z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2)}{|1 - \overline{z}z'|^2}
\end{aligned}$$
   Remarquons enfin que $(1-|z|^2)(1-|z'|^2) = 1+|zz'|^2-|z|^2-|z'|^2$. Or $|\overline{z}z'|^2 = |\overline{z}|^2|z'|^2 = |z|^2|z'|^2 = |zz'|^2$. On a bien
$$\boxed{1 - \left|\frac{z - z'}{1 - \overline{z}z'}\right|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z'|^2)}{|1 - \overline{z}z'|^2}}$$

4. Soit $P(n)$ la propriété : « $|z_n| < 1$ et $|z_{n+1}| < 1$ » . Remarquons que d'après la question 2, $P(n)$ implique que $\overline{z_n} z_{n+1} \neq 1$ et donc que z_{n+2} est bien définie.
Prouvons $P(n)$ par récurrence.
Initialisation : $P(0)$ est vraie d'après l'énoncé : $|z_0| < 1$ et $|z_1| < 1$.

Hérédité : On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Montrons alors $P(n+1)$: « $|z_{n+1}| < 1$ et $|z_{n+2}| < 1$ ». Par hypothèse de récurrence on sait déjà que $|z_{n+1}| < 1$ il reste donc à prouver que $|z_{n+2} < 1$.
On a
$$|z_{n+2}| = \left| \frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n} z_{n+1}} \right|$$
Or d'après la question 3,
$$\left| \frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n} z_{n+1}} \right|^2 = 1 - \frac{(1 - |z_n|^2)(1 - |z_{n+1}|^2)}{|1 - \overline{z_n} z_{n+1}|^2}$$
Par hypothèse de récurrence, $(1 - |z_n|^2)(1 - |z_{n+1}|^2) > 0$. Le dénominateur est aussi positif, donc $\frac{(1-|z_n|^2)(1-|z_{n+1}|^2)}{|1-\overline{z_n} z_{n+1}|^2} > 0$ et ainsi :
$$\left| \frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n} z_{n+1}} \right|^2 < 1$$
Donc $|z_{n+2}| < 1$. On a donc prouvé que la propriété P était héridditaire.
Conclusion : Par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme remarqué au début de récurrence, ceci implique que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. On considère l'équation du second degré suivante :
$$z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0 \quad (E)$$

1. A la manière d'une équation réelle, calculer le discriminant Δ du polynôme complexe, et montrer que $\Delta = 3 + 4i$
2. On se propose de résoudre (E_2) : $u^2 = \Delta$ d'inconnue complexe u.
   (a) On écrit $u = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que (E_2) est équivalent à
   $$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{2}{x}.$$
   (b) En déduire que les solutions de (E_2) sont
   $$u_1 = 2 + i \quad \text{et} \quad u_2 = -2 - i$$
3. Soit u_1 une solution de l'équation précédente. On considère $r_1 = \frac{-3i+4+u_1}{2}$. Montrer que r_1 est solutions de l'équation (E).
4. Quelle est à l'autre solution de (E) ?

Correction 2. On suit les étapes indiquées dans l'énoncé.

1. Le discriminant vaut
$$\Delta = (3i - 4)^2 - u^4(1 - 7i) = -9 - 24i + 16 - 4 + 28i = 3 + 4i$$
2. Résolvons $u^2 = 3 + 4i$.

(a) On pose donc $u = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ On a donc $(x+iy)^2 = 3+4i$, soit $x^2 - y^2 + 2xyi = 3+4i$ En identifiant partie réelle et partie imaginaire on obtient :

$$x^2 - y^2 = 3 \quad 2xy = 4$$

Comme $x \neq 0$ (sinon $\Delta \in \mathbb{R}_-$), la deuxième équation devient

$$\boxed{y = \tfrac{2}{x}.}$$

On remplace alors y avec cette valeur dans la première équation, ce qui donne :

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$$

et en multipliant par x^2

$$\boxed{x^4 - 3x - 4 = 0}$$

(b) On fait un changement de variable $X = x^2$ dans l'équation $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$. On obtient

$$X^2 - 3X - 4 = 0$$

De discriminant $\Delta_2 = 9 + 4 * 4 = 25 = 5^2$. Cette équation admet ainsi deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

Remarquons maintenant que X doit être positif car $x^2 = X$ ainsi, les solutions pour la variable x sont

$$x_1 = \sqrt{4} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = -\sqrt{4} = -2$$

Ce qui correspond respectivement à $y_1 = 1$ et $y_2 = -1$ On obtient finalement deux solutions pour $u^2 = \Delta$ à savoir

$$\boxed{u_1 = 2 + i \quad \text{et} \quad u_2 = -2 - i}$$

3. On considère donc $r_1 = \frac{-3i+4+2+i}{2} = 3 - i$. Montrons que r_1 est solution de (E)

$$r_1^2 = (3-i)^2 = 9 - 6i - 1 = 8 - 6i$$

$$(3i-4)r_1 = (3i-4)(3-i) = 9i + 3 - 12 + 4i = -9 + 13i$$

Donc $r_1^2 + (3i-4)r_1 = 8 - 6i - 9 + 13i = -1 + 7i$ Soit

$$r_1^2 + (3i-4)r_1 + 1 - 7i = 0$$

$$\boxed{\text{Donc } r_1 \text{ est bien solution de } (E).}$$

4. L'autre solution est sans aucun doute

$$\boxed{r_2 = \tfrac{-3i+4+u_2}{2} = 1 - 2i}$$