DM 5

Exercice 1. Soit z, z' deux nombres complexes.

1. Rappeler les valeurs de $A = z\overline{z}$, $B = |z\overline{z}|$, $C = |\overline{z}z'|^2$ en fonction de $|z|$ et $|z'|$.
2. On suppose dans cette question et la suivante que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$. Montrer que
$$\overline{z}z' \neq 1$$
3. Montrer que
$$1 - \left|\frac{z - z'}{1 - \overline{z}z'}\right|^2 = \frac{(1 - |z'|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{z}z'|^2}$$
4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes vérifiant : $|z_0| < 1, |z_1| < 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$z_{n+2} = \frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n}z_{n+1}}$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| < 1$ et que $\overline{z_n}z_{n+1} \neq 1$, et donc que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pourra utiliser les deux questions précédentes dans une récurrence double

Exercice 2. On considère l'équation du second degré suivante :

$$z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0 \quad (E)$$

1. A la manière d'une équation réelle, calculer le discriminant Δ du polynôme complexe, et montrer que $\Delta = 3 + 4i$
2. On se propose de résoudre (E_2) : $u^2 = \Delta$ d'inconnue complexe u.
   (a) On écrit $u = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que (E_2) est équivalent à
   $$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{2}{x}.$$
   (b) En déduire que les solutions de (E_2) sont
   $$u_1 = 2 + i \quad \text{et} \quad u_2 = -2 - i$$
3. Soit u_1 une solution de l'équation précédente. On considère $r_1 = \frac{-3i+4+u_1}{2}$. Montrer que r_1 est solutions de l'équation (E).
4. Quelle est à l'autre solution de (E) ?