

DM 6

Exercice 1. 1. A quelle condition sur $X, Y \in \mathbb{R}$ a-t-on

$$X = Y \iff X^2 = Y^2$$

2. On se propose de résoudre l'équation :

$$|\cos(x)| = |\sin(x)|. \tag{1}$$

(a) Montrer que (1) est équivalent à $\cos(2x) = 0$. (On pourra utiliser la question 1...)

(b) En déduire les solutions de (1) dans \mathbb{R} puis dans $[-\pi, \pi[$

Exercice 2. On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1 \quad \text{et} \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. Calculer T_2, T_3 et T_4 .

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

3. En déduire que $\forall x \in [-1, 1]$, on a $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. (La rédaction est importante, les variables ne peuvent pas vivre n'importe où)

Exercice 3. 1. Résoudre l'inéquation d'inconnue y suivante :

$$\frac{y-3}{2y-3} \leq 2y \quad (E_1)$$

2. En déduire les solutions sur \mathbb{R} de l'inéquation d'inconnue X :

$$\frac{\sin^2(X) - 3}{2 \sin^2(X) - 3} \leq 2 \sin^2(X) \quad (E_2)$$

3. Finalement donner les solutions sur $[0, 2\pi[$ de l'inéquation d'inconnue x :

$$\frac{\sin^2(2x + \frac{\pi}{6}) - 3}{2 \sin^2(2x + \frac{\pi}{6}) - 3} \leq 2 \sin^2(2x + \frac{\pi}{6}) \quad (E_3)$$