TD 8 - Suites réelles

I Monotonie et convergence

Exercice 1. Étudier la monotonie des suites définies par

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - n$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \frac{\ln(n)}{n}$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n + 2(-1)^n$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$

Exercice 2. Limites de suites définies explicitement
Étudier le comportement en $+\infty$ des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{n}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n^2)$
4. $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$
5. $u_n = \frac{2^n + n}{2^n}$
6. $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n - \ln(n^3)}$
7. $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$
8. $u_n = \frac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n}$
9. $u_n = \frac{\sin n}{n}$
10. $u_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$
11. $u_n = n^2 - n\cos n + 2$
12. $u_n = \frac{n! + (n+1)!}{(n+2)!}$
13. $u_n = \ln(2^n + n)$
14. $u_n = n^{\frac{1}{n}}$
15. $u_n = (\ln n)^n$
16. $u_n = \frac{n^3 + 2^n}{3^n}$
17. $u_n = (n^2 + n + 1)^{\frac{1}{n}}$
18. $u_n = \frac{1}{a^n}\sum_{k=1}^{n} b^k$
19. $u_n = n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right)$

Exercice 3. Calculer les limites des suites suivantes.

1. $u_n = e^{n^2+n+1}$
2. $u_n = e^{2n} - e^n$
3. $u_n = \frac{e^n + n^2 + n + 1}{e^{2n} + 1}$
4. $u_n = \frac{n}{n-1}e^{\frac{1}{n}}$
5. $u_n = e^{n^2} - e^{n+1}$
6. $u_n = \ln\left(\frac{e^n + 1}{e^n - 1}\right)$
7. $u_n = \ln\left(\frac{e^n + n^2}{2n+1}\right)$
8. $u_n = \ln\left(\frac{2-n}{n+4}\right)$
9. $u_n = \frac{2^n}{n^2+1}$
10. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln n$
11. $u_n = \frac{e^{\sqrt{n}}}{n^2}$
12. $u_n = e^n - n^{\frac{2}{3}}$
13. $u_n = e^{\frac{1}{n-2}}$
14. $u_n = (2n-1)e^{\frac{1}{n-2}}$
15. $u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n}$

II Etude de suite

Exercice 4. Suites homographiques.
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \geq 3$, $u_n > 1$.
2. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie sur $\mathbb{N}$.
3. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
4. En déduire l'expression explicite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n \end{cases}$$

1. Calculer $1 - u_{n+1}$ en fonction de $1 - u_n$.
2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si elle existe, en fonction du premier terme u_0.

Exercice 6. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par

$$u_1 = 1 \quad v_1 = 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $w_n = v_n - u_n$. Donner l'expression de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   Donner l'expression de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 7. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = -2a_n + b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = 3a_n.$$

1. Démontrer que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer b_n en fonction de n.

III Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 8. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.

1. Étudier la fonction f associée.
2. Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.
3. Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On suppose que $u_0 > 2$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 2$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On suppose que $u_0 \in \left]\dfrac{2}{3}, 2\right[$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in \left]\dfrac{2}{3}, 2\right[$.

(b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n^2 - u_n + 3 \end{cases}$

1. Étudier la fonction f associée.
2. Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.
3. Calculer les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 3$ ou $u_0 = 0$?
5. On suppose que $u_0 \in]0, 3[$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in]0, 3[$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. On suppose que $u_0 > 3$.
   (a) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 3$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. On suppose que $u_0 < 0$.
   (a) Montrer que $u_1 > 3$.
   (b) En déduire le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{(1+u_n)^2}{4}$.

Exercice 11. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$.

Exercice 12. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} = e^{u_n}$.