Correction TD6 : Systèmes linéaires

I Systèmes linéaires sans paramètre

Correction 1.

1. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -y & + & 3x & + & z & = & 5 \\ y & + & 2x & - & z & = & 1 \\ -y & + & x & + & z & = & 2 \\ y & + & 4x & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -y & + & 3x & + & z & = & 5 & \\ & & 5x & & & = & 6 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_1 + L_2} \\ & - & 2x & & & = & -3 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \\ & & 7x & + & 2z & = & 8 & \mathbf{L_4 \leftarrow L_4 + L_1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -y & + & 3x & + & z & = & 5 & \\ & & 5x & & & = & 6 & \\ & & & & 0 & = & -3 & \mathbf{L_3 \leftarrow 5L_3 + 2L_2} \\ & & 7x & + & 2z & = & 8 & \end{array}\right.$$

Le système est échelonné de rang 3. La troisième équation est impossible, donc le système est incompatible : $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

2. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ 2x & - & y & - & 2z & - & 3t & = & 8 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & + & t & = & -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 & \\ & - & 5y & - & 8z & + & t & = & -4 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ & - & 4y & - & 10z & + & 8t & = & -14 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \\ & - & 7y & - & 4z & + & 5t & = & -20 & \mathbf{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2t & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ & & t & - & 5y & - & 8z & = & -4 \\ & & 8t & - & 4y & - & 10z & = & -14 \\ & & 5t & - & 7y & - & 4z & = & -20 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & - & 2t & + & 2y & + & 3z & = & 6 & \\ & & t & - & 5y & - & 8z & = & -4 & \\ & & & & 36y & + & 54z & = & 18 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2} \\ & & & & 18y & + & 36z & = & 0 & \mathbf{L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & - & 2t & + & 2y & + & 3z & = & 6 & \\ & & t & - & 5y & - & 8z & = & -4 & \\ & & & & 36y & + & 54z & = & 18 & \\ & & & & & & 18z & = & -18 & \mathbf{L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ t & = & -2 \\ y & = & 2 \\ z & = & -1 \end{array}\right.$$

Le rang est 4. L'ensemble des solutions est donné par $\boxed{\mathcal{S} = \{(1, 2, -2, -1)\}}$. C'est un point de $\mathbb{R}^4$.

3. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 2 \\ 4x & - & y & - & z & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} y & + & z & + & 2x & = & 1 \\ -y & - & z & + & x & = & 2 \\ -y & - & z & + & 4x & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} y & + & z & + & 2x & = & 1 & \\ & & & & 3x & = & 3 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\ & & & & 6x & = & 4 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} y & + & z & + & 2x & = & 1 & \\ & & & & 3x & = & 3 & \\ & & & & 0 & = & -2 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \end{array}\right.$$

Le système est échelonné de rang 2 et $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$.

4. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & t & = & 1 \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 2 \\ x & - & y & - & z & - & t & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & y & + & z & - & t & = & 1 & \\ & - & 2y & - & 2z & + & 2t & = & 1 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ & - & 2y & - & 2z & & & = & 2 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{array}\right.$$

Le système est échelonné, de rang 3. On choisit x, y, t comme variables principales, et on fait passer t au second membre :

$$(S_4) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & t & = & 1 - z \\ & - & 2y & + & 2t & = & 1 + 2z \\ & & y & & & = & -1 - z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & \dfrac{3}{2} \\ t & = & -\dfrac{1}{2} \\ y & = & -1 - z \end{array}\right.$$

On a donc : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{3}{2}, -1 - z, z, -\frac{1}{2}\right),\ z \in \mathbb{R}\right\}} = \left\{\left(\frac{3}{2}, -1, 0, -\frac{1}{2}\right) + z\,(0, -1, 1, 0),\ z \in \mathbb{R}\right\}$. On obtient une droite de $\mathbb{R}^4$ passant par $\left(\frac{3}{2}, -1, 0, -\frac{1}{2}\right)$ et de vecteur directeur $(0, -1, 1, 0)$.

5. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & - & z & = & -2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} z & - & y & + & 3x & = & 5 \\ -z & + & y & + & x & = & -2 \\ z & + & 2y & - & x & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} z & - & y & + & 3x & = & 5 & \\ & & & & 4x & = & 3 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\ & & 3y & - & 4x & = & -2 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{array}\right.$$

Le rang est échelonné et de rang 3. On obtient en remontant les équations : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{37}{12}\right)\right\}}$.

6. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & & & - & 4x_5 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & & & = & 0 & \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 & \\ & - & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 6x_4 & - & 4x_5 & = & 0 & \mathbf{L_3 - 2L_1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & & & = & 0 & \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 & \\ & & & & & - & 12x_4 & + & 2x_5 & = & 0 & \mathbf{L_3 + 3L_2} \end{array}\right.$$

Le système est échelonné et le rang est 3. On choisit x_1, x_2, x_4 comme inconnues principales, et on passe x_3, x_5 au second membre. On obtient :

$$(S_6) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_4 & = & x_3 \\ & & x_2 & - & 2x_4 & = & -x_3 - 2x_5 \\ & & & & x_4 & = & \dfrac{x_5}{6} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & 3x_3 + \dfrac{17}{6}x_5 \\ \\ x_2 & = & -x_3 - \dfrac{5}{3}x_5 \\ \\ x_3 & = & \dfrac{x_5}{6} \end{array}\right.$$

et $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(3x_3 + \dfrac{17}{6}x_5, -x_3 - \dfrac{5}{3}x_5, x_3, \dfrac{1}{6}x_5, x_5\right),\ (x_3, x_5) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

7. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 2t & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 3z & + & t & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 2t & = & 1 \\ & & y & & & - & t & = & -1 \end{array}\right. \quad \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}$$

Le système est échelonné est le rang est 2 On choisit x et y comme variables principales, et on fait passer z, t au second membre. On obtient :

$$(S_7) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 3 - 3z - 4t \\ y & = & t - 1 \end{array}\right.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{(3 - 3z - 4t, t - 1, z, t),\ (z, t) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

8. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 5a & + & b & + & 2c & = & 13 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & 11 \\ a & - & b & + & c & = & 2 \\ 3a & + & b & + & c & = & 8 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} b & + & 2c & + & 5a & = & 13 \\ 2b & + & c & + & 4a & = & 11 \\ -b & + & c & + & a = & 2 & \\ b & + & c & + & 3a & = & 8 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{cccccccl} b & + & 2c & + & 5a & = & 13 & \\ & - & 3c & - & 6a & = & -15 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ & & 3c & + & 6a & = & 15 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \\ & - & c & - & 2a & = & -5 & \mathbf{L_4 \leftarrow L_4 - L_1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} b & + & 2c & + & 5a & = & 13 \\ & & c & + & 2a & = & 5 \end{array}\right.$$

Le système est échelonné et le rang est 2. On choisit b et c comme inconnues principale, et on fait passer a au second membre. On obtient :

$$(S_8) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} b & = & 3 - a \\ c & = & 5 - 2a \end{array}\right.$$

Ainsi : $\boxed{\mathcal{S} = \{(a, 3 - a, 5 - 2a),\ a \in \mathbb{R}\}} = \{(0, 3, 5) + a\,(1, -1, -2),\ a \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble est une droite de $\mathbb{R}^3$, passant par le point de coordonnées $(0, 3, 5)$ et de vecteur directeur $(1, -1, -2)$.

9. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 3x & + & 2y & + & z & - & u & - & v & = & 0 \\ x & - & y & - & z & - & u & + & 2v & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 3z & + & u & - & v & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} -x & + & 2y & + & 3z & + & u & - & v & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & z & - & u & - & v & = & 0 \\ x & - & y & - & z & - & u & + & 2v & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{cccccccccccl} -x & + & 2y & + & 3z & + & u & - & v & = & 0 & \\ & & 8y & + & 10z & + & 2u & - & 4v & = & 0 & \mathbf{L_2 + 3L_1} \\ & & y & + & 2z & & & + & v & = & 0 & \mathbf{L_3 + L_1} \end{array}\right.$$

$$(S_9) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x & + & 2y & + & 3z & + & u & - & v & = & 0 \\ & & y & + & 2z & & & + & v & = & 0 \\ & & 4y & + & 5z & + & u & - & 2v & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x & + & 2y & + & 3z & + & u & - & v & = & 0 \\ & & y & + & 2z & & & + & v & = & 0 \\ & & & - & 3z & + & u & - & 6v & = & 0 \end{array}\right. \quad \mathbf{L_3 - 4L_2}$$

Le système est échelonné et le rang est 3. On choisit x, y, z comme inconnues principales, et on met u, v au second membre. On obtient :

$$(S_9) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -v - \frac{1}{3}u \\ y & = & 3v - \frac{2}{3}u \\ z & = & \frac{u}{3} - 2v \end{array}\right.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(-v - \frac{1}{3}u, 3v - \frac{2}{3}u, \frac{u}{3} - 2v, u, v\right), \ (u,v) \in \mathbb{R}^2\right\}}$

10. On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & - & 4t & = & 4 \\ & & y & - & z & + & t & = & -3 \\ x & + & 3y & & & - & 3t & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & - & 4t & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & - & 4t & = & 4 \\ & & y & - & z & + & t & = & -3 \\ & & 5y & - & 3z & + & t & = & -3 \\ & & 4y & - & 2z & & & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \\ \mathbf{L_4 \leftarrow L_4 - L_1} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & - & 4t & = & 4 \\ & & y & - & z & + & t & = & -3 \\ & & 4y & - & 2z & & & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & & & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & - & 4t & = & 4 \\ & & y & - & z & + & t & = & -3 \\ & & 4y & - & 2z & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Le système est échelonné et le rang est 3. On choisit x, z, t comme inconnues principales, et on met y au second membre. On obtient :

$$(S_{10}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -8 \\ t & = & y - 3 \\ z & = & 2y \end{array}\right.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \{(-8, y, 2y, y-3), \ y \in \mathbb{R}\}}$.

II Systèmes linéaires avec paramètre

Correction 2. Discuter les solutions dans $\mathbb{R}$ des systèmes suivants en fonction des paramètres indiqués :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} mx & + & y & + & z & = & X \\ x & + & my & + & z & = & Y \\ x & + & y & + & mz & = & Z \end{array}\right. \quad (m \in \mathbb{R})$

On applique la méthode du pivot de Gauss, en faisant attention d'échanger les lignes pour avoir au maximum des pivots indépendants de m :

$$\mathcal{S} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & Z \\ x & + & my & + & z & = & Y \\ mx & + & y & + & z & = & X \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} x & + & y & + & mz & = & Z & \\ & & (m-1)y & + & (1-m)z & = & Y-Z & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ & & (1-m)y & + & (1-m^2)z & = & X-mZ & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - mL_1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} x & + & y & + & mz & = & Z & \\ & & (m-1)y & + & (1-m)z & = & Y-Z & \\ & & & & (2-m-m^2)z & = & X-mZ+Y-Z & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \end{array}\right.$$

On a un système échelonné. On fait des cas sur les pivots : $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, et $2-m-m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \notin \{1,-2\}$.

- Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, alors le système est de rang 3, et on obtient, en remontant les équations :

$$\boxed{\mathcal{S}_{m \notin \{1,-2\}} = \left\{\left(\frac{Z+Y-(1+m)X}{(1-m)(2+m)}, \frac{Z-(1+m)Y+X}{(1-m)(2+m)}, \frac{X+Y-(m+1)Z}{(1-m)(2+m)}\right)\right\}.}$$

- Si $m=1$, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & Z \\ & & & + & 0 & = & Y-Z \\ & & & & 0 & = & X+Y-2Z \end{array}\right.$$

  Le système est de rang 1, et on a deux équations de compatibilité : $0 = Y-Z$ et $0 = X+Y-2Z$.

  - ⋆ Si $X=Y=Z$, les deux équations sont vérifiées et on a

$$\boxed{\mathcal{S}_{m=1} = \left\{(-y-z+Z, y, z)\,,\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

  - ⋆ Si $X \neq Y$ ou $X \neq Z$, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_{m=1} = \emptyset.}$$

- Si $m=-2$, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & Z \\ & & -3y & + & 3z & = & Y-Z \\ & & & & 0 & = & X+Y+Z \end{array}\right.$$

  Le système est de rang 2, et on a une équation de compatibilité : $0 = X+Y+Z$.

  - ⋆ Si $X+Y+Z=0$, on a :

$$\boxed{\mathcal{S}_{m=-2} = \left\{\left(z+\frac{Y+2Z}{3}, z+\frac{Z-Y}{3}, z\right),\ z \in \mathbb{R}\right\}}.$$

  - ⋆ Si $X+Y+Z \neq 0$, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_{m=-2} = \emptyset.}$$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcl} (m+1)x & + & my & = & 2m \\ mx & + & (m+1)y & = & 1 \end{array}\right.$ $(m \in \mathbb{R})$

On résout ce système linéaire de deux équations à deux inconnues. Ici, tous les coefficients dépendent de m : on est obligés de faire des cas sur m dès le départ.

- Si $m \neq 1$, on peut prendre la première ligne comme ligne pivot, et on obtient :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcl} (m+1)x & + & my & = & 2m \\ mx & + & (m+1)y & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} (m+1)x & + & my & = & 2m \\ & - & (2m+1)y & = & 2m^2-m-1 \quad \mathbf{(m+1)L_2 - mL_2} \end{array}\right.$$

Le système est échelonné. On refait des cas sur m pour que les pivots soient non nuls.

  ⋆ Si $m \neq -\dfrac{1}{2}$: on obtient alors le système suivant, en remarquant que $2m^2-m-1 = (m-1)(2m+1)$:

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} (m+1)x & + & my & = & 2m \\ & & y & = & 1-m. \end{array}\right.$$

  Ainsi, si $m \neq -1$ et si $m \neq -\dfrac{1}{2}$, le système est de rang 2 et est donc un système de Cramer, avec :

$$\boxed{\mathcal{S}_{m\notin\{-1,-\frac{1}{2}\}} = \{(m, 1-m)\}\,.}$$

  ⋆ Si $m = -\dfrac{1}{2}$:
  On obtient alors :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}x & - & \frac{1}{2}y & = & -1 \\ & & 0 & = & 0. \end{array}\right.$$

  On obtient un système échelonné de deux inconnues et dont le rang est 1. Il admet ainsi une infinité de solutions. On choisit x comme inconnue principale et y comme inconnue secondaire et on obtient

$$\boxed{\mathcal{S}_{m=-\frac{1}{2}} = \{(-2+y, y),\ y \in \mathbb{R}\}\,.}$$

- Si $m = -1$, on obtient en remplaçant dans le système de départ :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} & - & y & = & -2 \\ -x & & & = & 1 \end{array}\right.$$

  Ainsi, on a : $\boxed{\mathcal{S}_{m=1} = \{(-1, 2)\}.}$

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & my & + & m^2z & = & 2m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 2m \\ mx & + & y & - & m^2z & = & 1-m \end{array}\right.$ $(m \in \mathbb{R})$

On commence par résoudre le système en éliminant les cas où le pivot est nul.

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & my & + & m^2z & = & 2m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 2m \\ mx & + & y & - & m^2z & = & 1-m \end{array}\right. \Leftrightarrow (S')\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & my & + & m^2z & = & 2m \\ & & & + & m(1-m^2)z & = & 2m(1-m) \\ & & (1+m^2)y & - & m^2(1+m)z & = & 1-m-2m^2. \end{array}\right.$$

On réecrit le système (S') en le mettant sous forme triangulaire et on obtient le système équivalent suivant

$$(S''):\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & my & + & m^2z & = & 2m \\ & & (1+m^2)y & - & m^2(1+m)z & = & 1-m-2m^2 \\ & & & & m(1-m^2)z & = & 2m(1-m). \end{array}\right.$$

- Si $m \neq -1$, $m \neq 0$ et $m \neq 1$, on obtient un système de Cramer (de rang 3) que l'on résout en remontant les calculs et on obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_{m \notin \{-1,0,1\}} = \left\{ \left(\frac{m(m^2+3)}{(1+m)(1+m^2)}, \frac{1-m}{1+m^2}, \frac{2}{1+m} \right) \right\}.}$$

- Si $m = -1$r, on reprend le système (S'') (on reprend au niveau où on a dû faire l'hypothèse de non égalité) et on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & -2 \\ & & 2y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & -4. \end{array} \right.$$

La dernière équation n'a pas de solution, donc on a : $\boxed{\mathcal{S}_{m=-1} = \emptyset.}$

- Si $m = 0$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 0 \\ & & y & & & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0. \end{array} \right.$$

Le système est de rang 2, et a pour solutions : $\boxed{\mathcal{S}_{m=0} = \{(0,1,z),\ z \in \mathbb{R}\}.}$

- Si $m = 1$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & 2y & - & 2z & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 2-z-1+z \\ y & = & -1+z \end{array} \right.$$

Le système est de rang 2, et a pour solutions : $\boxed{\mathcal{S}_{m=1} = \{(1,-1+z,z),\ z \in \mathbb{R}\}.}$

4. $\left\{ \begin{array}{rcrcl} (m-1)x & - & my & = & m \\ (m+1)x & + & (m+1)y & = & m^2-1 \end{array} \right. \quad (m \in \mathbb{R})$

Je ne donne ici que le résultat :

- Si $m \neq -1$ et $m \neq \dfrac{1}{2}$, alors $\boxed{\mathcal{S}_{m \notin \{-1, \frac{1}{2}\}} = \left\{ \left(\frac{m^2}{2m-1}, \frac{m^2-3m+1}{2m-1} \right) \right\}.}$
- Si $\mathbf{m} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, alors $\boxed{\mathcal{S}_{m=\frac{1}{2}} = \emptyset.}$
- Si $\mathbf{m} = -\mathbf{1}$, alors $\boxed{\mathcal{S}_{m=-1} = \{(x,-1+2x),\ x \in \mathbb{R}\}.}$

5. $\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & my & = & m^2 \\ mx & + & y & = & m^2 \end{array} \right. \quad (m \in \mathbb{R})$

Je ne donne ici que le résultat :

- Si $m \neq 1$ et $\mathbf{m} \neq -\mathbf{1}$, le système est alors un système de Cramer et $\boxed{\mathcal{S}_{m \notin \{1,-1\}} = \left\{ \left(\frac{m^2}{1+m}, \frac{m^2}{1+m} \right) \right\}.}$
- Si $m = 1$, alors $\boxed{\mathcal{S}_{m=1} = \{(x,1-x),\ x \in \mathbb{R}\}.}$

- Si $m=-1$, alors $\boxed{\mathcal{S}_{m=-1}=\emptyset.}$

6. $\left\{\begin{array}{ccccc} y & + & z & = & rx \\ x & + & z & = & ry \\ x & + & y & = & rz \end{array}\right. \quad (r\in\mathbb{R})$

Attention qu'ici, il faut absolument repasser les x, y, z à gauche du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} y & + & z & = & rx \\ x & + & z & = & ry \\ x & + & y & = & rz \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} -rx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & ry & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & rz & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & rz & = & 0 \\ x & - & ry & + & z & = & 0 \\ -rx & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} x & + & y & - & rz & = & 0 & \\ & & (-r-1)y & + & (1+r)z & = & 0 & \mathbf{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ & & (1+r)y & + & (1-r^2)z & = & 0 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 + rL_1} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & rz & + & y & = & 0 \\ & & (1+r)z & + & (-r-1)y & = & 0 \\ & & (1-r^2)z & + & (1+r)y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} x & - & rz & + & y & = & 0 & \\ & & (1+r)z & + & (-r-1)y & = & 0 & \\ & & & & (-r^2+r+2)y & = & 0 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - (1-r)rL_2} \end{array}\right.$$

On fait des cas sur r :

- Si $r\neq -1$ et $r\neq 2$, alors on a un système de rang 3, qui a donc une unique solution. Or le système est homogène, donc : $\boxed{\mathcal{S}_{r\notin\{-1,2\}}=\{(0,0,0)\}.}$
- Si $r=2$, alors on obtient :

$$(S)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2z & + & y & = & 0 \\ & & 3z & - & 3y & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

  Le système est de rang 2, et les solutions sont données par : $\boxed{\mathcal{S}_{r=2}=\{(z,z,z),\ z\in\mathbb{R}\}.}$
- Si $r=-1$, alors on obtient :

$$(S)\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} x & - & z & + & y & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & \mathbf{L_3 \leftarrow L_3 - (1-r)rL_2} \end{array}\right.$$

  Le système est de rang 1 et les solutions sont données par : $\boxed{\mathcal{S}_{r=-1}=\{(-y-z,y,z),\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\}.}$

III Divers

Correction 3. **Soit la fonction f définie par :**

$$\mathbf{f} : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x+2y, 5x+3y). \end{array} \right.$$

Montrer que pour tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (X,Y)$ et donner l'expression de x et y en fonction de X et Y.
Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ fixé. On cherche s'il existe un unique couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (X,Y)$. On résout ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 3x & + & 2y & = & X \\ 5x & + & 3y & = & Y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} 3x & + & 2y & = & X & \\ & & y & = & 5X-3Y & \mathbf{5L_1 - 3L_2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -3X+2Y \\ y & = & 5X-3Y. \end{array} \right.$$

Ainsi, on a montré que pour tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ il existe un unique $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(X,Y) = f(x,y)$: f est donc bijective. De plus, on a $f(x,y) = (X,Y) \Leftrightarrow (x,y) = (-3X+2Y, 5X-3Y)$ donc la bijection réciproque est donnée par :

$$\boxed{f^{-1} : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (X,Y) & \mapsto & (-3X+2Y, 5X-3Y). \end{array} \right.}$$

Correction 4. **Équilibrer la réaction chimique suivante :**

$$\mathbf{H_2SO_3 + HBrO_3 \to H_2SO_4 + Br_2 + H_2O}.$$

On note x le nombre de molécules de H_2SO_3, y celui de $HBrO_3$, z celui de H_2SO_4, t celui de Br_2 et u celui de H_2O. Afin d'équilibrer la réaction chimique suivante, on doit résoudre le système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x & & & - & z & & & & & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 2z & - & 2u & & & = & 0 \\ 3x & + & 3y & - & 4z & - & u & & & = & 0 \\ & & y & & & & & - & 2t & = & 0. \end{array} \right.$$

On peut mettre ce système sous la forme échelonnée suivante

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x & - & z & & & & & & & = & 0 \\ & - & z & - & u & + & 3y & & & = & 0 \\ & & & - & 2u & + & y & & & = & 0 \\ & & & & & & y & - & 2t & = & 0. \end{array} \right.$$

C'est un système échelonné de rang 4 avec 5 inconnues, il y a donc une infinité de solutions. Les inconnues principales sont ici x, y, z, u et l'inconnue secondaire est t. En résolvant ce système de bas en haut, on obtient la solution suivante

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(5t, 2t, 5t, t, t),\ t \in \mathbb{R}\}.}$$

En prenant par exemple $t = 1$ et en remettant dans la réaction chimique, on trouve la réaction chimique équilibrée suivante

$$\boxed{5H_2SO_3 + 2HBrO_3 \to 5H_2SO_4 + Br_2 + H_20.}$$

Correction 5. La somme des carrés.

1. **Trouver un polynôme de degré 3 tel que $\mathbf{P(X+1)-P(X)=X^2}$:**
Un polynôme de degré 3 s'écrit sous la forme générale suivante :
$$P(X)=aX^3+bX^2+cX+d$$
avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$. Déterminons les coefficients $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ pour que P vérifie la condition voulue :
$$\begin{aligned}P(X+1)-P(X)=X^2 &\Leftrightarrow a(X+1)^3+b(X+1)^2+c(X+1)+d-aX^3-bX^2-cX-d=X^2\\ &\Leftrightarrow 3aX^2+3aX+a+2bX+b+c=X^2.\end{aligned}$$
En identifiant les coefficients, on obtient le système linéaire suivant, que l'on peut mettre directement sous la forme échelonnée suivante :
$$\begin{cases} c+b+a=0\\ 2b+3a=0\\ 3a=1.\end{cases}$$
La résolution donne : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{6},d\right),\ d\in\mathbb{R}\right\}}$. Il n'y a aucune condition sur d, on peut par exemple prendre $d=0$. Ainsi, le polynôme suivant convient
$$\boxed{P(X)=\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X.}$$

2. **Retrouver alors l'expression de $\mathbf{S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2}$:**
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$ fixé. On calcule S_n en utilisant le polynôme P trouvé à la question précédente et en prenant $X=k$:
$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}P(k+1)-\sum_{k=1}^{n}P(k)\\ &= \sum_{k=2}^{n+1}P(k)-\sum_{k=1}^{n}P(k)\\ &= P(n+1)-P(1)\\ &= \frac{2(n+1)^3-3(n+1)^2+(n+1)-2+3-1}{6}\\ &= \frac{n+1}{6}\left(2n^2+4n+2-3n-3+1\right)\\ &= \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.\end{aligned}$$
On retrouve bien la formule connue.

Correction 6. **On considère les points $A=(1,2,-1)$ et $B=(-2,4,0)$.**

1. **Déterminer une représentation paramétrique et une représentation cartésienne de (AB).**
La droite (AB) passe par le point $A=(1,2,-1)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}(-3,2,1)$.
On en déduit une équation paramétrique de (AB) :
$$\begin{cases}x=1-3\lambda\\ y=2+2\lambda\\ z=-1+\lambda\end{cases}\ ;\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$
Trouvons une équation cartésienne de (AB) :
Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On résout :
$$\begin{cases}1-3\lambda=x\\ 2+2\lambda=y\\ -1+\lambda=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=z+1\\ 2\lambda=y-2\\ -3\lambda=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=z+1\\ 0=y-2z-4\\ 0=x+3z+2\end{cases}$$

On en déduit :

$$M \in (AB) \iff \left(\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \right) \iff \begin{cases} y - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

Donc (AB) a pour équation cartésienne :

$$\begin{cases} y - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

2. **En fonction de $m \in \mathbb{R}$, déterminer l'intersection de (AB) avec la droite $\mathcal{D}_m$.**
Première remarque : $\overrightarrow{AB}(-3, 2, 1)$ est un vecteur directeur de (AB), et $\vec{u}(1, -2, 2)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_m$ (quel que soit le réel m).
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc (AB) et $\mathcal{D}_m$ ne sont pas parallèles. On en déduit :
• soit (AB) et $\mathcal{D}_m$ sont sécantes, et leur intersection sera réduite à un point ;
• soit (AB) et $\mathcal{D}_m$ sont non coplanaires, et leur intersection sera vide.
Lorsque m varie, la direction de la droite $\mathcal{D}_m$ ne change pas, mais cette droite "glisse" le long de l'axe (Oz), puisqu'elle passe par le point $E_m(3, 2, m)$.
Comme l'axe (Oz) n'est pas parallèle à (AB), on s'attend à ce que, pour une valeur de m donnée, la droite $\mathcal{D}_m$ coupe (AB), et que pour toutes les autres, $\mathcal{D}_m$ et (AB) soient non coplanaires.

Passons à présent aux calculs :
Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour trouver $\mathcal{D}_m \cap (AB)$, prenons un point de $\mathcal{D}_m$ et regardons à quelle condition il appartient à (AB).

Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{D}_m$: $\exists s \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = s + 3 \\ y = -2s + 2 \\ z = 2s + m \end{cases}$. On résout :

$$M \in (AB) \iff \begin{cases} y - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2s + 2 - 2(2s + m) - 4 = 0 \\ s + 3 + 3(2s + m) + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -6s - 2m - 2 = 0 \\ 7s + 3m + 5 = 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \begin{cases} 3s + m = -1 \\ 7s + 3m = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3s + m = -1 \\ 2m = -8 \quad \mathbf{L_2 \leftarrow 3L_2 - 7L_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1 \\ m = -4 \end{cases}$$

Conclusion :

• Si $m = -4$, alors $M \in (AB) \iff s = 1 \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$, donc l'unique point d'intersection de $\mathcal{D}_m$ avec (AB) est $M_0(4, 0, -2)$.
• Si $m \neq -4$, alors l'équation $M \in (AB)$ n'a pas de solution lorsque M est un point de $\mathcal{D}_m$, donc l'intersection de $\mathcal{D}_m$ avec (AB) est vide.