TD 6 : Systèmes linéaires

I Systèmes linéaires sans paramètre

Exercice 1. Déterminer le rang et résoudre les systèmes linéaires d'inconnues réelles suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & 2t & = & 6 \\ 2x & - & y & - & 2z & - & 3t & = & 8 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2t & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & + & t & = & -8 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 2 \\ 4x & - & y & - & z & = & 3 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & t & = & 1 \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 2 \\ x & - & y & - & z & - & t & = & 3 \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & - & z & = & -2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$

6. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & & & - & 4x_5 & = & 0 \end{array}\right.$

7. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & + & 2t & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 3z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$

8. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5a & + & b & + & 2c & = & 13 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & 11 \\ a & - & b & + & c & = & 2 \\ 3a & + & b & + & c & = & 8 \end{array}\right.$

9. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & - & u & - & v & = & 0 \\ x & - & y & - & z & - & u & + & 2v & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 3z & + & u & - & v & = & 0. \end{array}\right.$

10. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & - & 4t & = & 4 \\ & & y & - & z & + & t & = & -3 \\ x & + & 3y & & & - & 3t & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & - & 4t & = & 4 \end{array}\right.$

II Systèmes linéaires avec paramètre

Exercice 2. Discuter les solutions dans $\mathbb{R}$ des systèmes suivants en fonction des paramètres $m \in \mathbb{R}$ ou $r \in \mathbb{R}$:

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} mx & + & y & + & z & = & X \\ x & + & my & + & z & = & Y \\ x & + & y & + & mz & = & Z \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcr} (m+1)x & + & my & = & 2m \\ mx & + & (m+1)y & = & 1 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & my & + & m^2z & = & 2m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 2m \\ mx & + & y & - & m^2z & = & 1-m \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{rcrcr} (m-1)x & - & my & = & m \\ (m+1)x & + & (m+1)y & = & m^2-1 \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & my & = & m^2 \\ mx & + & y & = & m^2 \end{array}\right.$

6. $\left\{\begin{array}{rcrcr} y & + & z & = & rx \\ x & + & z & = & ry \\ x & + & y & = & rz \end{array}\right.$

III Divers

Exercice 3. Soit la fonction f définie par :

$$f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & \\ (x,y) & \mapsto & (3x+2y, 5x+3y). \end{array} \right.$$

Montrer que pour tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (X,Y)$ et donner l'expression de x et y en fonction de X et Y.

Remarque : on dit que f est bijective. La fonction qui à (X,Y) associe l'expression trouvée pour (x,y) est appelée bijection réciproque de f et est notée f^{-1}. On peut vérifier que $f^{-1}(f(x,y)) = (x,y)$ et que $f(f^{-1}(X,Y)) = (X,Y)$.

Exercice 4. Équilibrer la réaction chimique suivante :

$$H_2SO_3 + HBrO_3 \to H_2SO_4 + Br_2 + H_2O.$$

Exercice 5. La somme des carrés.

1. Trouver un polynôme de degré 3 tel que $P(X+1) - P(X) = X^2$.
2. Retrouver alors l'expression de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 6. On considère les points $A = (1,2,-1)$ et $B = (-2,4,0)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique et une représentation cartésienne de (AB).
2. En fonction de $m \in \mathbb{R}$, déterminer l'intersection de (AB) avec la droite $\mathcal{D}_m$ représentée paramétriquement par
$$\left\{ \begin{array}{l} x = s+3 \\ y = -2s+2 \quad ; \quad s \in \mathbb{R}. \\ z = 2s+m \end{array} \right.$$