Nettoyage erreur de calcul

On se propose de résoudre le système suivant

$$(S_\lambda) : \begin{cases} \lambda x + (1-\lambda)y = 1 \\ (1-\lambda)x + \lambda y = 1 \end{cases}$$

On propose 3 solutions, de la moins efficace à la plus efficace.

Solution 1 On fait $L_1 \leftarrow (1-\lambda)L_1$ et $L_2 \leftarrow \lambda L_2$. On suppose donc que $1-\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 0$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \neq 1, \text{ et } \lambda \neq 0}$$

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} \lambda(1-\lambda)x + (1-\lambda)^2 y = (1-\lambda) \\ \lambda(1-\lambda)x + \lambda^2 y = \lambda \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda(1-\lambda)x + (1-\lambda)^2 y = (1-\lambda) \\ (\lambda^2-(1-\lambda)^2)y = \lambda-(1-\lambda) \end{cases}$$

On a d'une part $(\lambda^2-(1-\lambda)^2) = 2\lambda-1$ et d'autre part $(\lambda-(1-\lambda) = 2\lambda-1$ (c'est ici où j'ai fait une erreur de calcul dans le cours)

On obtient alors

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} \lambda(1-\lambda)x + (1-\lambda)^2 y = (1-\lambda) \\ (2\lambda-1)y = 2\lambda-1 \end{cases}$$

Le système est maintenant échelonné, son rang dépend de λ. Si $2\lambda-1=0$ c'est-à-dire, $\lambda = \frac{1}{2}$, alors le système devient :

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})x + (1-\frac{1}{2})^2 y = 1-\frac{1}{2} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

le système est de rang 1.

$$(S_\lambda) \iff \left\{ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{2} \right. \iff \left\{ x + y = 2 \right.$$

Si $\underline{\lambda = 1/2}$

$$\boxed{S_{1/2} = \{(2-y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}}$$

Si $\lambda \neq 1/2$ (toujours dans le cas, $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$), le système est de rang 2.

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} \lambda(1-\lambda)x + (1-\lambda)^2 y = (1-\lambda) \\ y = 1 \end{cases} \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda}L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda x + (1-\lambda)y = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad (\lambda \neq 1)$$

$$\iff \begin{cases} \lambda x + 1-\lambda = 1 \\ y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad (\lambda \neq 0)$$

Pour tout $\underline{\lambda \notin \{0, 1/2, 1\}}$:

$$\boxed{S_\lambda = \{(1,1)\}}$$

Il faut maintenant traiter à part le $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$:

Si $\underline{\lambda = 0}$

$$(S_0) \iff \begin{cases} 0x + (1-0)y = 1 \\ (1-0)x + 0y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{S_0 = \{(1,1)\}}$$

Si $\underline{\lambda = 1}$

$$(S_1) \iff \begin{cases} 1x + (1-1)y = 1 \\ (1-1)x + 1y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{S_1 = \{(1,1)\}}$$

Solution 2 C'est cette version que vous devriez tous savoir faire.

Dans la solution 1, on a mutliplié la premiere ligne par $(1-\lambda)$ pour après diviser par $(1-\lambda)$ dans le cas $\lambda \neq 1/2$... Cela semble pas très utile. On peut éviter cela grace à l'opération $L_2 \leftarrow \lambda L_2 - (1-\lambda)L_1$. Il faut alors seulement supposer $\lambda \neq 0$

$$\boxed{\text{Si } \lambda \neq 0}$$

$$(S_\lambda) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} \lambda x & + & (1-\lambda)y & = 1 \\ & & (\lambda^2-(1-\lambda)^2)y & = \lambda-(1-\lambda) \end{array} \right.$$

Les mêmes calculs que précédemment donnent :

$$(S_\lambda) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} \lambda(1-\lambda)x & + & (1-\lambda)^2 y & = (1-\lambda) \\ & & (2\lambda-1)y & = 2\lambda-1 \end{array} \right.$$

Le système est maintenant échelonné, son rang dépend de λ. Si $2\lambda-1=0$ c'est-à-dire, $\lambda=\frac{1}{2}$, alors le système devient :

$$(S_\lambda) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})x & + & (1-\frac{1}{2})^2 y & = 1-\frac{1}{2} \\ & & 0 & = 0 \end{array} \right.$$

le système est de rang 1.

$$(S_\lambda) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} \frac{1}{4}x & + & \frac{1}{4}y & = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} x & + & y & = 2 \end{array} \right.$$

Si $\underline{\lambda = 1/2}$

$$\boxed{S_{1/2} = \{(2-y,y)\,|\,y \in \mathbb{R}\}}$$

Si $\lambda \neq 1/2$ (toujours dans le cas, $\lambda \neq 0$), le système est de rang 2. (C'est ici qu'on gagne un peu par rapport à la premiere solution)

$$(S_\lambda) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} \lambda x & + & (1-\lambda)y & = 1 \\ & & y & = 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} \lambda x & + & 1-\lambda & = 1 \\ & & y & = 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} x & & & = 1 \\ & & y & = 1 \end{array} \right. \quad (\lambda \neq 0)$$

Pour tout $\underline{\lambda \notin \{1/2, 1\}}$:

$$\boxed{S_\lambda = \{(1,1)\}}$$

Il faut maintenant traiter à part le $\lambda = 0$:

Si $\underline{\lambda = 0}$

$$(S_0) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrl} 0x & + & (1-0)y & = 1 \\ (1-0)x & + & 0y & = 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} y & = 1 \\ x & = 1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{S_0 = \{(1,1)\}}$$

Solution 3 On peut remarquer quand additionnant les deux lignes on supprime le paramètre, ce qui évite de faire la disjonction un peut inutile $\lambda \neq 0$. Ca marche ici, pas de raison que ca marche sur un autre système. Ce n'est pas la méthode à privilégier si les systèmes ce n'est pas très clair pour vous (Faites le pivot de Gauss version Solution 2, c'est LA méthode).

On fait donc l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$.

$$(S_\lambda) : \left\{ \begin{array}{rcrl} \lambda x & + & (1-\lambda)y & = 1 \\ x & + & y & = 2 \end{array} \right. \overset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrl} x & + & y & = 2 \\ \lambda x & + & (1-\lambda)y & = 1 \end{array} \right.$$

On a alors un pivot non nul et on fait $L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1$.

$$(S_\lambda) : \left\{ \begin{array}{cccl} x & + & y & = 2 \\ & + & (1-2\lambda)y & = 1-2\lambda \end{array} \right.$$

Le système est maintenant échelonné, son rang dépend de λ. Si $2\lambda - 1 = 0$ c'est-à-dire, $\lambda = \frac{1}{2}$, alors le système devient :

$$(S_\lambda) : \left\{ \begin{array}{cccl} x & + & y & = 2 \\ & + & 0y & = 0 \end{array} \right.$$

le système est de rang 1.

Si $\underline{\lambda = 1/2}$

$$\boxed{S_{1/2} = \{(2-y, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}}$$

Si $\lambda \neq 1/2$ (et là il n'y a pas le cas à part $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$), le système est de rang 2.

$$(S_\lambda) : \left\{ \begin{array}{cccl} x & + & y & = 2 \\ & + & y & = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{cccl} x & + & & = 1 \\ & + & y & = 1 \end{array} \right.$$

Pour tout $\underline{\lambda \notin \{1/2\}}$:

$$\boxed{S_\lambda = \{(1, 1)\}}$$