Correction - DM7

Problème 1. On se propose dans ce problème de calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$, définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$$

1. Etude de la convergence de $(S_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Déterminer le sens de variation de $(S_n)_{n\geq 1}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq 0$.
   (c) En déduire que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge. On note ℓ sa limite.
2. Minoration de la limite
   (a) A l'aide d'un changement de variable montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

   (b) Montrer à l'aide d'une somme téléscopique que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

   (c) En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.
   (d) A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \geq 0$:

   $$\ln(1+x) \leq x.$$

   (e) Montrer à l'aide des questions précédentes que

   $$\ell \geq \ln(2).$$

3. Majoration de la limite.
   (a) A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \geq 0$:

   $$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$

(b) On pose $e_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2}$. On va montrer que $(e_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.

i. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \geq 0$.

ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}$.

iii. Conclure.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n \leq e_n + \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

(d) En déduire la valeur de ℓ.

Correction 1.

1. (a) On calcule $S_{n+1} - S_n$ on obtient

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k+n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$$

On fait un changemetn de variable sur la première somme en posant $i = k+1$ on a alors

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{i+n} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$$

Ce qui se simplifie en

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}$$

On obtient en mettant au même dénominateur

$$S_{n+1} - S_n = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0$$

$$\boxed{(S_n)_{n\geq 1} \text{ est décroissante.}}$$

(b) Il y avait une erreur dans le sujet... La somme aurait du partir de 1 au lieu de 0. On se rend compte que l'inégalité demandée pour $n = 1$ est d'ailleurs fausse.

Pour la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ voilà ce qu'on aurait pu faire. $\forall k \in [\![, n]\!]$, $\frac{1}{k+n} \leq \frac{1}{1+n}$ En sommant ces inégalités on obtient $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+n}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+n} = \frac{1}{1+n} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n}{n+1}$ Ainsi

$$\boxed{S_n \leq \frac{n}{n+1}}$$

Sinon on peut montrer que $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$ est majorée par $\frac{n+1}{n}$ avec la même méthode. Mais ce n'est pas très utile, on voudrait plutot montrer qu'elle est minorée. Et, comme S_n est une somme de terme positif, $S_n \geq 0$.

(c) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 est décroissante donc

$$\boxed{(S_n)_{n\geq 1} \text{ converge.}}$$

Avec la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ on aurait pu dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était croissante. De plus $u_n \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ donc majorée par 1. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. (a) On fait une étude de fonction : soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \ln(1+x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

. Ainsi pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$, on a donc pour tout $x \geq 0$ $f(x) \geq 0$, c'est-à-dire $x - \ln(1+x) \geq 0$. Finalement

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ x \geq \ln(1+x)}$$

(b) On pose le changement de variable $i = k + n$. On a Comme $k \in [\![0, n]\!]$, on a $i = k + n \in [\![n, 2n]\!]$ et donc

$$S_n = \sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i}$$

Comme l'indice est muet on a bien

$$\boxed{S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=n}^{2n} \ln(k+1) - \ln(k) \\
&= \sum_{k=n}^{2n} \ln(k+1) - \sum_{k=n}^{2n} \ln(k)
\end{aligned}$$

On fait le changmeent de variable $i = k + 1$ dans la première somme : on obtient

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln(k+1) = \sum_{i=n+1}^{2n+1} \ln(i)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{i=n+1}^{2n+1} \ln(i) - \sum_{k=n}^{2n} \ln(k)\\
&= \sum_{i=n+1}^{2n} \ln(i) + \ln(2n+1) - \left(\ln(n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k)\right)\\
&= \ln(2n+1) - \ln(n) + \sum_{i=n+1}^{2n} \ln(i) - \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k)\\
&= \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)
\end{aligned}$$

(d) En tant que quotient de polynômes on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$ Par composition, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \ln(2)$ Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(2)}$$

(e) D'après la question 1), on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

Donc en sommant pour $k \in [\![n, 2n]\!]$ on obtient :

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq S_n$$

On applique maintenant le résultat de bas de page, avec $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $v_n = S_n$ qui sont deux suites qui admettent bien des limites donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \lim_{n\to+\infty} S_n$$

On obtient bien :

$$\boxed{\ln(2) \leq \ell}$$

3. (a) On fait une autre étude de fonction. On pose $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1-x+x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

Donc $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0) = 0$, on obtient pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) = 0$. Ainsi pour tout $x \geq 0$, on a $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$, d'où

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}}$$

(b) i. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une somme de termes positifs, donc positive.

ii. On va majorer tout les termes par le plus grand terme apparaissant dans la somme. On a $\forall k \in [\![n, 2n]\!]$, $\frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2n^2}$

Donc
$$e_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2} \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2n^2}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n^2} \sum_{k=n}^{2n} 1$. Il y a $(n+1)$ entier entre n et $2n$ donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} 1 = n+1$.

On a finalement $e_n \leq \frac{1}{2n^2}(n+1)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}}$$

iii. D'après les questions précédentes , pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}$$

On a par ailleurs $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n^2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$.

Donc le théorème des gendarmes assure que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} e_n = 0}$$

(c) On applique l'inégalité obtenue en 2a) à $\frac{1}{k} > 0$. On obtient donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

En sommant ces inégalités entre n et $2n$ on obtient donc

$$\sum_{k=n}^{2n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}\right) \leq \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Ce qui donne en utilisant la linéarité :

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2} \leq \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

D'où

$$S_n - e_n \leq \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

En faisant passer e_n dans le membre de droite on obtient

$$\boxed{S_n \leq e_n + \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

(d) On applique le théorème de bas de page aux suites $u_n = S_n$ et $v_n = e_n + \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ et on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} e_n + \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ Par somme de limites on obtient bien

$$\ell \leq \ln(2)$$

Avec l'inégalité $\ln(2) \leq \ell$ obtenue en 2e) on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)}$$

Correction 2.

1. On va prouver que $2n \leq 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit donc $P(n)$ la propriété $P(n)$: ´ $2n \leq 3^n$ ˇ Initialisation : $P(0)$ est vrai car $2 * 0 = 0 \leq 3^0 = 1$
   Hérédité : On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors $2(n+1) = 2n+2 \leq 3^n+2$ par hypothèse de récurrence. Or $3^n+2 = 3^n(1+2*3^{-n})$ et pour $3^{-n} \leq 1$ donc $(1 + 2 * 3^{-n}) \leq 3$ et finalement

   $$2(n+1) \leq 3^n + 2 \leq 3^{n+1}.$$

   La propriété P est donc vraie au rang $(n+1)$
   Conclusion : Par principe de récurrence,

   $$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 2n \leq 3^n}$$

2. (a) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$. On fait un changement de variable : $k+1 = i$ on a donc

   $$S_1 = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i}$$

   On applique ensuite la formule du binôme de Newton

   $$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - \binom{n+1}{0} \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{S_1 = 2^{n+1} - 1}$$

(b)

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} a^{2k} \frac{1}{4^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} (a^2)^k \frac{1}{4} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a^2}{4} \right)^k$$

On reconnait ici la somme d'une suite géométrique.
Si $a^2 \neq 4$:

$$\boxed{S_2 = \frac{1}{4} \frac{1 - \left(\frac{a^2}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{a^2}{4}\right)}}$$

Si $a^2 = 4$:

$$\boxed{S_2 = \frac{1}{4}(n+1)}$$

(c)

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=0}^{2n} (k^3 + 1) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} k^3 + \sum_{k=0}^{2n} 1 \\ &= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} + 2n + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{S_3 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} + 2n + 1}$$

(d)

$$\begin{aligned} P_1 &= \prod_{k=3}^{n+1} k^2 \\ &= \left(\prod_{k=3}^{n+1} k \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{1 * 2} \prod_{k=1}^{n+1} k \right)^2 \\ &= \frac{1}{4}((n+1)!)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{1}{4}((n+1)!)^2}$$

3.
```
n = int(input('que vaut n'))
s3=0
for k in range(0,2*n+1):
    s3=s3+k^3+1
print(s3)
```

4.
```
n = int(input('que vaut n'))
P1=1
for k in range(3,n+2):
    P1=P1*(k**2)
print(P1)
```

Correction 3.

1.
$$\frac{1}{\omega} = e^{\frac{-2i\pi}{7}} = \overline{\omega}$$

2. On a $\omega^7 = e^{7\frac{2i\pi}{7}} = e^{2i\pi} = 1$ donc pour tout $k \in [\![0, 7]\!]$ on a
$$\omega^{7-k}\omega^k = 1$$
D'où
$$\omega^k = \frac{1}{\omega^{7-k}} = \overline{\omega}^{7-k}$$

3. On a d'après la question précédente :
$$\overline{\omega} = \omega^6$$
$$\overline{\omega^2} = \omega^5$$
$$\overline{\omega^4} = \omega^3$$
Ainsi on a :
$$\begin{aligned}\overline{A} &= \overline{\omega + \omega^2 + \omega^4} \\ &= \overline{\omega} + \overline{\omega^2} + \overline{\omega^4} \\ &= \omega^6 + \omega^5 + \omega^3 \\ &= B.\end{aligned}$$

4.
$$\mathfrak{Im}(A) = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) + \sin(\frac{8\pi}{7}) = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7})$$
Comme sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$
$$\sin(\frac{\pi}{7}) \leq \sin(\frac{2\pi}{7})$$
Donc
$$\mathfrak{Im}(A) \geq \sin(\frac{4\pi}{7}) > 0$$

5. On a
$$\sum_{k=0}^{6} \omega^k = \frac{1-\omega^7}{1-\omega} = 0$$
Or
$$A + B = \sum_{k=1}^{6} \omega^k = \sum_{k=0}^{6} \omega^k - 1 = -1$$

6. $AB = \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10}$ D'où
$$AB = 2\omega^7 + \omega^4(1 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6) = 2\omega^7 = 2$$

7. A et B sont donc les racines du polynome du second degré $X^2 + X + 2$. Son discriminant vaut $\Delta = 1 - 8 = -7$ donc
$$A \in \{\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}\}$$
D'après la question 4, $\mathfrak{Im}(A) > 0$ donc
$$A = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

Correction 4.

1. (Fais en cours.) On calcule $S_{n+1} - S_n$ on obtient
$$S_{n+1} - S_n =$$
donc
$$\boxed{(S_n)_{n\geq 1} \text{ est croissante.}}$$

2. (Fais en cours.) $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{1}{k+n} \leq \frac{1}{1+n}$ En sommant ces inégalités on obtient $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+n}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+n} = \frac{1}{1+n} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n}{n+1}$ Ainsi
$$\boxed{S_n \leq \frac{n}{n+1}}$$

3. (Fais en cours.) Comme $n + 1 \geq n$ on a $\frac{n}{n+1} \leq 1$ donc $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 1. La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée donc
$$\boxed{(S_n)_{n\geq 1} \text{ converge.}}$$