

Table des matières

I Primitive. Définition de l'intégrale	1
I. 1 Primitive d'une fonction continue sur un intervalle	1
I. 2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment	2
I. 3 Interprétation géométrique de l'intégrale	2
II Propriétés de l'intégrale	2
II. 1 Relation de Chasles	2
II. 2 Linéarité de l'intégrale	3
II. 3 Intégrale et inégalité	3
II. 3. a Inégalités larges	3
II. 4 Intégrale et valeur absolue	5
II. 5 Primitive comme intégrale	5
III Méthodes de calcul d'intégrales	5
III. 1 Reconnaître une primitive usuelle	5
III. 2 Intégration par parties	6
III. 3 Changement de variables	7

Chapitre 11 : Intégration et calcul de primitives

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point.

I Primitive. Définition de l'intégrale

I. 1 Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . On appelle primitive de f sur I toute fonction F qui vérifie :

- F est $\mathcal{C}^1(I)$.
- $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

- Exemples.**
- La fonction $x \mapsto x$ admet comme primitive sur \mathbb{R} la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2}$
 - La fonction $x \mapsto \cos(x)$ admet comme primitive sur \mathbb{R} la fonction $x \mapsto \sin(x)$
 - La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet comme primitive sur \mathbb{R}^{+*} la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$
 - La fonction $x \mapsto e^{2x}$ admet comme primitive sur \mathbb{R} la fonction $x \mapsto \frac{e^{2x}}{2}$

Théorème 2. Théorème fondamental :

- Toute fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} admet une primitive sur I
- Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I , alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I, F_1(x) = F_2(x) + c$.

Ainsi pour justifier qu'une primitive de f existe sur I il suffit de :
Justifier que f est continue sur I .

 Le théorème précédent ne s'applique que si I est un intervalle de \mathbb{R} .

Exercice 1. En dérivant la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$, donner une autre expression de f .

Voir le tableau des primitives usuelles

Exercice 2. Calculer une primitive des fonctions suivantes après avoir justifié son existence :

1. $x \mapsto 4 - 5x + 6x^2 + 8x^3 - x^5$.

2. $x \mapsto a^x$ avec $a > 0$.

3. $x \mapsto \frac{1}{2x-5}$.

4. $x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}$, $a \neq 0$.

5. $x \mapsto (3x^2+2)\sqrt{2x^3+4x}$

6. $f : x \mapsto xe^{-x^2}$.

7. $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

8. $f : x \mapsto \cos(x)\sin^n(x)$.

9. $f : x \mapsto \frac{1}{(x-2)^2}$.

10. $f : x \mapsto \frac{1}{(4-x)^3}$.

I. 2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition 3. Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

- On appelle intégrale de f de a à b le réel : $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$
- $F(b) - F(a)$ est aussi noté $\int_a^b f(t)dt$

Exercice 3. 1. Calcul de $\int_0^1 (-4x^3 + x^2 + 3x + 4)dx$

2. Calcul de $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$

3. Calcul de $\int_0^1 xe^{x^2} dx$

Remarques. • La variable d'intégration est muette

- La variable d'intégration ne doit JAMAIS apparaître dans les bornes ou à l'extérieur de l'intégrale.

I. 3 Interprétation géométrique de l'intégrale

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur I et **positive** sur I .

Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

Soit $\mathcal{D} = \{M(x, y), a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Alors l'intégrale de f entre a et b est égale à l'aire de \mathcal{D} .

II Propriétés de l'intégrale

II. 1 Relation de Chasles

Proposition 4. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et a, b, c trois réels de I .

$$\bullet \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\bullet \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$\bullet \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\bullet \text{ Si } a_0, a_1, \dots, a_n \text{ sont aussi des réels de } I, \text{ on a : } \int_{a_0}^{a_n} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$$

Exercice 4. 1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{10e}{9+x^2} & \text{si } x < 1. \end{cases}$ Calculer $\int_0^2 f(t)dt$.

2. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin u|du$.

II. 2 Linéarité de l'intégrale

Proposition 5. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur I et a, b deux réels de I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\bullet \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\bullet \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

• Si f_1, \dots, f_n sont continues sur I et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ alors :

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b \lambda_i f_i(x) dx \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\int_a^b f_i(x) dx \right)$$

Exercice 5. Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$. On pourra montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$.

II. 3 Intégrale et inégalité

II. 3. a Inégalités larges

Théorème 6. Théorème de positivité de l'intégrale : si on a

- f continue sur $[a, b]$.
- $\forall x \in [a, b]$, on a $f(x) \geq 0$.
- $a \leq b$.

Alors, $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Remarque. On a un résultat similaire pour les fonctions négatives.

Etude du signe d'une intégrale = étude du signe de la fonction à l'intérieur.

Exercice 6. Montrer que $\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{3}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \geq 0$ et que $\int_2^3 \frac{x^2 + x - 2}{-x^2 + x + 12} dx \geq 0$.

Application : étude de suite définie par une intégrale.

L'étude de suite définie par des intégrales fait partie des exos types sur les intégrales à connaître parfaitement. Le plus souvent pour étudier la convergence de telles suites, on utilise le théorème sur les suites monotones et ainsi il faut montrer que la suite est soit croissante et majorée, soit décroissante et minorée.

Méthode pour l'étude de la monotonie d'une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par une intégrale :
Signe de $I_{n+1} - I_n$: étude du signe de la fonction à l'intérieur + théorème de positivité de l'intégrale.

Exercice 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème 7. Théorème de croissance de l'intégrale : si

- f, g, h continue sur $[a, b]$.
- $\forall x \in [a, b]$, on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
- $a \leq b$.

Alors on a : $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b h(x)dx$.

Encadrement d'une intégrale = encadrement de la fonction à l'intérieur.

Application : étude de suite définie par une intégrale

Méthode pour calculer la limite d'une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par une intégrale :
Théorème de croissance de l'intégrale + théorème des gendarmes ou théorème de comparaison

On NE peut PAS passer à la limite directement à l'intérieur de l'intégrale. (intervertion de limite, l'intégrale est déjà une limite en quelque sorte)

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$. Étudier la convergence de cette suite.

Exercice 9. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n dt$. Calculer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. Calculer la limite de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On pourra en particulier montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.

II. 4 Intégrale et valeur absolue

Théorème 8. Inégalité triangulaire pour les intégrales :

- f continue sur $[a, b]$
- $a < b$

Alors : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Exercice 10. Soit g une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0, 1]$ tel que : $\left| \int_0^1 g(x) \sin(x) dx \right| \leq |g(x_0)|$.

II. 5 Primitive comme intégrale

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et soit $a \in I$. On peut alors définir une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, g(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Proposition 9. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , $a \in I$ et $g : x \in I \mapsto \int_a^x f(t) dt$. Alors :

- g est de classe dérivable sur I
- $g(x) = F(x) - F(a)$ avec F une primitive de f
- $\forall x \in I, g'(x) = f(x)$

Remarque. La fonction g ainsi définie est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

III Méthodes de calcul d'intégrales

III. 1 Reconnaître une primitive usuelle

Bien connaître le tableau des primitives usuelles.

[Voir le tableau des primitives usuelles](#)

Calculer des fonctions dérivées à la chaîne...

Vérifier rapidement que notre primitive est bien une primitive.

III. 2 Intégration par parties

Proposition 10. Intégration par parties :

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Quand utiliser l'IPP ?

- Si la fonction est de type
Polynôme \times $\left\{ \begin{array}{l} \text{cosinus, sinus} \\ \text{exponentielle, ln} \\ \text{arctangente} \end{array} \right.$
- Obtenir des relations de récurrence pour l'étude des suites définies par des intégrales.

Méthode avec une IPP :

- On pose :
$$\begin{cases} u(t) = \dots & u'(t) = \dots \\ v'(t) = \dots & v(t) = \dots \end{cases}$$
- Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$, donc par intégration par partie, on a :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Quelle fonction doit-on dériver ?

Le choix de la fonction que l'on dérive suit la loi ALPET :

- D'abord A comme arctangente
- Puis L comme logarithme népérien
- Puis P comme polynôme
- Puis E comme exponentielle
- Enfin T comme trigonométrie

Exercice 11. Calculer les intégrales suivantes

1. $I(x) = \int_1^x \ln t dt.$

3. $I = \int_0^1 x^2 \sin x dx.$

2. $I(x) = \int_0^x \arctan t dt.$

4. $I = \int_0^\pi \cos x e^x dx.$

Application : Étude de suite définie par une intégrale :

Relation de récurrence pour une suite définie par une intégrale : Intégration par partie

Exercice 12. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e (\ln t)^n t^2 dt$. Trouver une relation de récurrence.

III. 3 *Changement de variables*

Proposition 11. Changement de variables : si

- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I
- et $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Remarque : On applique souvent des changements de variables avec φ bijective. Dans ce cas, on a la formule suivante :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

- On pose $u = \varphi(t)$. ($\varphi^{-1}(u) = t$, si φ bijective)
- On calcule du en fonction de t . ($du = \varphi'(t)dt$)
- On calcule la nouvelle fonction à intégrer.
- On calcule les nouvelles bornes de l'intégrale.

Exercice 13. Calculer $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$, $J = \int_1^2 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du$.